MALA BIBLIOTEKA
ZA MATEMATIKU, FIZIKU I KEMIJU

KVADRATURA KRUGA

NAPISAO
STJEPAN ŠKARICA

2111

3. MALA BIBLIOTEKA
za matematiku, fiziku i kemiju
Urednik: Prof. Gustav Šindler

TISAK GRAFIČKI ZAVOD HRVATSKE — ZAGREB

KVADRATURA KRUGA

NAPISAO

STJEPAN ŠKARICA

ŠKOLSKA KNJ GA
ZAGREB 1951

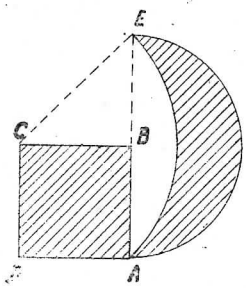
I. KVADRATURA KRUGA I REKTIFIKACIJA KRUŽNICE

1. Problem kvadrature kruga. *Kvadraturom* lika zovemo određivanje površine toga lika. Površinu zadanoga lika određujemo ili računom s pomoću poznatih formula ili tako, da nacrtamo kvadrat, koji mu je po površini jednak.

Klasični problem kvadrature kruga je konstruktivni problem. Valja *konstruirati* kvadrat jednak zadanome krugu. Riječ „konstruirati" ima strogo određeno značenje. Traženi kvadrat valja nacrtati služeći se samo šestilom za crtanje kružnih lukova i ravnalom bez skale za crtanje pravaca. Osim toga se traži, da tih dviju *osnovnih konstrukcija* bude konačan broj. Nuzgred spominjemo, da su i druga dva klasična problema: *podvostručenje kocke i trisekcija kuta* konstruktivni problemi.

Svakom mnogokutu s konačnim brojem stranica možemo konstruirati jednak trokut, svakom trokutu jednak pravokutnik, a svakom pravokutniku jednak kvadrat, t. j. svakom mnogokutu možemo konstruirati jednak kvadrat. *Arhimed* je dokazao, da se svakom paraboličnom odsječku može konstruirati jednak kvadrat, a 200 godina prije njega *Hipokrat*,

da ima ravnih likova, koji su omeđeni kružnim lukovima, a mogu se konstrukcijom pretvoriti u kvadrat. U slici 1. dvokut AE, omeđen polukružnicom nad promjerom AE i kvadrantom kružnice $C(CE)$, jednak je kvadratu $ABCD$. Evo zašto: Krugovi su slični likovi, pa im se površine odnose kao kvadrati njihovih polumjera. Površine krugova $C(CE)$ i $B(BE)$ odnose se dakle kao $\overline{CE}^2 : \overline{BE}^2 = 2:1$, i stoga je četvrtina prvog jednaka polovini drugog. Ako se od tih jednakih likova odbije odsječak kruga $C(CE)$ određen tetivom AE, izlazi, da je dvokut $AE = \triangle ACE = ABCD$.



Sl. 1.

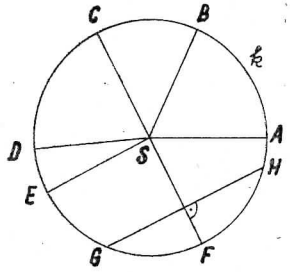
Ti i slični primjeri zavodili su i stručnjake i nestručnjake na pomisao, da i problem kvadrature kruga nije tako tvrd orah.

Prije, nego se zabavimo tim problemom, valja nam dobro upoznati neke osobine kruga i kružnice, kako bi riječima „površina" i „opseg" kruga mogli dati jasno i posve određeno značenje.

2. Krug i kružnica. Krajnja točka S dužine SA (sl. 2.) neka bude čvrsta! Ako se dužina SA okrene u ravnini oko točke S jedamput, ne mijenjajući se po duljini, opisat će dio ravnine, koji zovemo ***krug***,

a druga njezina krajnja točka A opisat će neprekinutu zatvorenu krivu crtu k, koju zovemo ***kružnica***.

Vrteći se oko S dužina SA dolazi u položaje $SB, SC, SD, \ldots$, a A točka u položaje $B, C, D, \ldots$ Odatle izlazi:



Sl. 2.

a) Na svakoj zraci s početnom točkom S leži jedna i samo jedna točka kružnice k. Dužina, koja spaja tu točku s točkom S, zove se ***polumjer*** ili ***radius***. Svi su polumjeri iste kružnice među sobom jednaki, pa ako duljinu polumjera SA označimo sa r, možemo pisati $SA = SB = SC = \ldots = r$. Vrijedi i obrat: Ako je za neku točku E ravnine kružnice $SE = r$, ona leži na kružnici k.

Na svakom pravcu ravnine kružnice, koji prolazi kroz S, leže dvije i samo dvije točke kružnice k, na pr. C i F. One su krajnje točke dužine, koja se zove ***promjer*** ili ***dijametar***, pa se zovu ***dijametralne točke*** kružnice. Svaki je promjer po duljini jednak dvostrukom polumjeru, i prema tome su svi promjeri iste kružnice jednaki. Duljina se promjera označuje često slovom d, pa je na pr. $CF = d = 2r$.

Kako su dijametralne točke simetrične s obzirom na S, kružnica je *centralno simetričan lik*, t. j. ona ima *središte simetrije* ili kratko *središte*, a to je točka S.

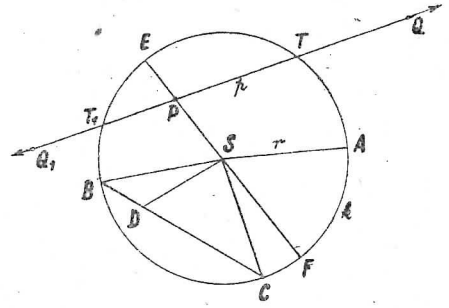
Kružnica je i *aksijalno simetričan lik*, a simetrala joj je svaki pravac, koji prolazi njezinim središtem. Ako se na pr. točki G kružnice k (sl. 2.) konstruira s obzirom na promjer CF simetrična točka H, onda je $SH = SG = r$, t. j. točka H je na kružnici k. Svaki promjer dijeli po tome kružnicu na dvije sukladne *polukružnice*, a krug na dva sukladna *polukruga*.

b) Ako se ma koji polumjer kruga, na pr. SB, okrene u ravnini kruga oko središta S jedamput, opisat će krug istovjetan sa zadanim, a njegova krajnja točka B kružnicu istovjetnu s kružnicom k Ako se dakle kružnica vrti u svojoj ravnini oko svoga središta, ona se pomiče u sebi. Budući da se kružnica može pomicati u sebi, ona nema čvorova, a kako je neprekinuta i zatvorena, dijeli ravninu na dva dijela, kojima je ona zajednička međa. Jedan od tih dijelova je krug, pa se kružnica stoga zove i *obodnicom* ili *periferijom* kruga.

Udaljenost ma koje točke P kruga od središta S (sl. 3.) manja je od polumjera r, ali krugu pripada i svaka točka P ravnine, za koju je $SP < r$, jer je ona nutarnja točka jednoga od polumjera (SE). Za svaku

točku Q drugog dijela ravnine je $SQ > r$ (sl. 3.). Taj dio je po veličini beskonačan, dok je krug konačan. Sve točke kruga leže *unutar* kružnice, a sve točke drugog dijela ravnine *izvan*.

Ako su B i C točke kružnice (sl. 3.), dužina BC zove se *tetiva*; sve točke tetive, osim njezinih



Sl. 3.

krajnjih točaka, leže unutar kružnice. Ako je naime D točka tetive BC, pa povučemo dužinu SD, jedan je od sukuta s vrhom u D tupi kut; ako je to $\sphericalangle BDS$, onda je $SD < BS$, t. j. $SD < r$. Odatle izlazi, da pravac i kružnica ne mogu imati 3 različite točke zajednički.

Točka P neka leži unutar, a točka Q izvan kružnice k (sl. 3.)! Povucimo pravac $p \equiv PQ$ i promjer EF, koji prolazi točkom P! Kako točka P leži između E i F, to te dvije točke leže na suprot-

nim stranama pravca p. Svaka od dvije polukružnice, koje spajaju točke E i F, siječe pravac p u po jednoj točki (T i T_1), jer su i kružnica k i pravac p neprekinute crte. Budući da su te polukružnice simetrične s obzirom na pravac EF, točka P leži između točaka T i T_1. Ako točka Q pripada zraci PT, onda točka T leži između P i Q, jer bi u protivnom slučaju točka Q pripadala dužini PT, t. j. tetivi TT_1, pa bi onda ležala unutar kružnice.

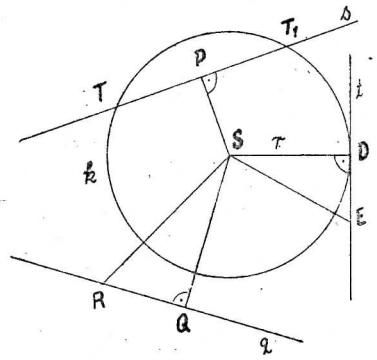
Ako se dakle nekom točkom P unutar kružnice k povuče kakav god pravac p, on siječe kružnicu u dvije različite točke T i T_1; točka P pripada tetivi TT_1, a točke zraka TQ i T_1Q_1 (sl. 3.), osim početnih, leže izvan k.

c) Iz središta S kružnice k spustimo okomicu SP na pravac s (sl. 4.)! Ako je $SP < r$, točka P leži unutar k, pa s siječe kružnicu u dvije različite točke T i T_1 i zove se *sekanta* kružnice.

Ako je daljina središta S od nekog pravca q veća od polumjera r, t. j. $SQ > r$, sve točke pravca q leže izvan k, jer je za svaku njegovu točku R dužina $SR > SQ > r$.

Ako je $SD = r$, pa u točki D nacrtamo pravac $t \perp SD$, točka D pravca t leži na kružnici k, a sve ostale njegove točke, na pr. E, leže izvan k, jer je $SE > r$. Pravac t ima dakle sa kružnicom k samo jednu zajedničku točku (D), pa velimo, da on kružnicu *dotiče* ili *dira* u točki D, a zovemo ga *tangenta* ili *dirka* kružnice, dok je točka D njihovo *diralište*.

Vrijedi i obrat: Ima li neki pravac t s kružnicom k samo jednu zajedničku točku D, on je u toj točki okomit na pripadnom polumjeru SD (sl. 4.), jer kad to ne bi bio, bila bi mu daljina od središta S manja od polumjera, pa bi imao s kružnicom dvije različite točke zajedničke.

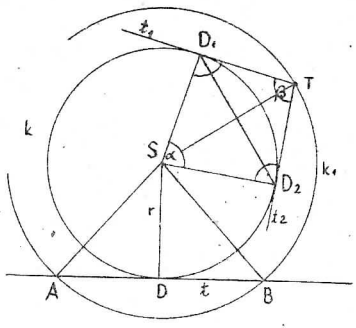


Sl. 4.

U svakoj dakle točki kružnice može se povući tangenta, ali samo jedna. Sve točke kružnice leže na onoj strani tangente, gdje leži središte kružnice, i stoga je kružnica u svakoj svojoj točki prema vanjskom dijelu ravnine *izbočena* ili *konveksna*.

Iz svake točke T izvan kružnice k (sl. 5.) mogu se na kružnicu povući dvije tangente, i to samo dvije. Da to dokažemo, nacrtajmo u po volji odabranoj točki D kružnice k tangentu t i polumjerom ST opišimo kružnicu k_1 koncentričnu sa zadanom! Budući da je točka D nutarnja točka kružnice k_1, siječe ta kružnica tangentu t u dvije različite točke

A i B, i to simetrične prema D, jer je $SD \perp t$; zbog toga je $AD = BD$. Zavrtimo li $\triangle SAD$ oko S, dok točka A padne u T, diralište D doći će u D_1, a tangenta t u položaj t_1; zavrtimo li $\triangle SBD$ oko S, dok B padne u T, doći će D u D_2, a t u položaj t_2. Odatle izlazi, da je $TD_1 = TD_2$, da je ST simetrala tetive D_1D_2 i kutova α i β, i da je $\alpha + \beta = 180^0$; osim toga je $\sphericalangle TD_1D_2 = \sphericalangle TD_2D_1 = \frac{\alpha}{2}$, jer su ta sva tri kuta komplementi kuta $\frac{\beta}{2}$.



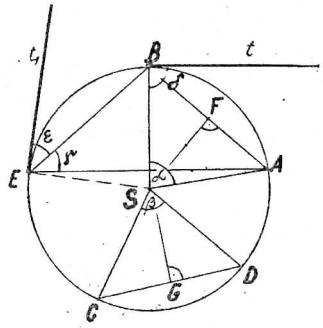
Sl. 5.

Treće tangente TD_3 nema, jer bi se $\triangle TSD_3$ zbog sukladnosti (III. poučak) morao pokrivati ili s trokutom TSD_1 ili TSD_2.

Dirališta D_1 i D_2 dobiju se najjednostavnije tako, da se kružnica k presiječe kružnicom $T(AD)$. Ta konstrukcija tangenata kružnice iz točke izvan nje potječe od *Euklida*.

d) Tetiva dijeli kružnicu na dva *kružna luka*; za manji od njih kažemo, da *pripada* tetivi. Kut, što ga zatvaraju dva polumjera, na pr. α (sl. 6.), zove se *središnji*, a kut, što ga zatvaraju dvije tetive, koje izlaze iz iste točke, na pr. γ, zove se *obodni kut*. Za središnji ili obodni kut velimo, da *leži nad* lukom kružnice, ako mu kraci prolaze krajnjim točkama luka, a luk leži unutar kuta; tako kutovi α i γ leže nad lukom AB.

Ako od tri jednadžbe $\alpha = \beta$, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (sl. 6.) vrijedi jedna, onda vrijede i ostale dvije; to dokazujemo vrtnjom kruga oko središta, i stoga su središnji kutovi i njima pripadni kružni lukovi upravno razmjerne veličine. Na isti način nalazimo, da jednake tetive imaju jednaku udaljenost od središta ($SF = SG$), t. j. one su tangente kružnice, kojoj je ta udaljenost polumjer, a središte S.



Sl. 6.

Neka je t tangenta u B, a t_1 u E! Prema *c*) je $\varepsilon + \gamma = \frac{1}{2} \sphericalangle ASE$; kako je $\varepsilon = \frac{1}{2} \sphericalangle BSE$, to je $\gamma = \frac{\alpha}{2}$.

Odatle izlazi:

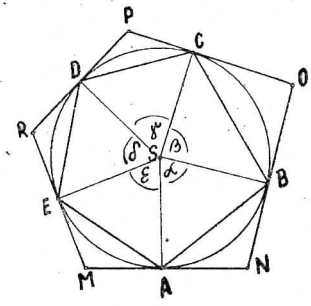
Obodni je kut polovina središnjeg, koji s njim leži nad istim lukom, i stoga je uvijek konkavan.

Obodni kutovi nad istim lukom ili nad sukladnim lukovima među sobom su jednaki.

Obodni kut nad polukružnicom je pravi (*Talesov poučak*).

Kut među tangentom i tetivom jednak je obodnom kutu, koji leži nad lukom između tangente i tetive na pr. $\sphericalangle(AB,t) = \delta = \gamma$, jer je prema *c*) i $\delta = \frac{\alpha}{2}$.

e) Puni kut s vrhom u središtu S kružnice k (sl. 7.) razdijelimo na n dijelova $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ tim redom tako, da ti dijelovi budu konkavni kutovi, i povucimo pripadne im tetive AB, $BC, \ldots\ldots EA$! Te tetive omeđuju *tetivni mnogokut* $ABC \ldots E$, koji je *konveksan*, jer mu svi ostali vrhovi leže na istoj strani pravca određenog s ma koja dva susjedna vrha. Budući da mu stranice leže unutar kružnice, on je dio kruga i prema tome od kruga manji; kružnica je njemu *opisana*, a on je njoj *upisan*. Ako su kutovi $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ jednaki, on je pravilan, jer su mu onda sve stranice i svi kutovi jednaki.



Sl. 7.

Ako u vrhovima A, B, $C, \ldots$ tako dobivenog tetivnog mnogokuta povučemo tangente MN, NO, $OP, \ldots\ldots$, nastat će *tangencijalni mnogokut* $MNO \ldots R$. Taj je *konveksan*, jer mu svi ostali vrhovi leže na istoj strani pravca, koji je određen s ma koja dva susjedna vrha. Kad bi jedan od vrhova ležao na protivnoj strani, jedan bi od kutova $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ bio konkavan. Sve točke kružnice — osim dirališta A, B, $C, \ldots\ldots$ leže unutar njegovih kutova; stoga je krug njegov dio, i prema tome je on od kruga veći. Kružnica je njemu upisana, a on je njoj opisan. Ako su kutovi $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ jednaki, on je pravilan.

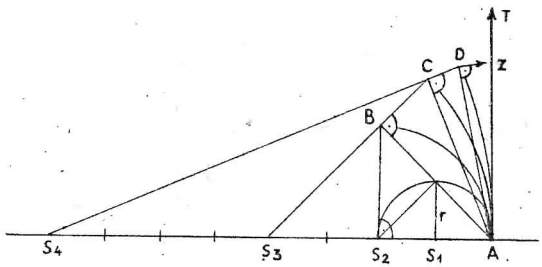
Ako kažemo, da mnogokut $AB \ldots\ldots E$ pripada mnogokutu $MN \ldots R$, i obratno, svaki je konveksni tangencijalni mnogokut i po površini i po opsegu veći od njemu pripadnog tetivnog. Po površini je veći, jer je tetivni manji od kruga, a po opsegu stoga, što je $MA + ME > AE$, $NA + NB > AB$, i t d.

3. Rektifikacija kružnice. *a*) Ako se krug poput čvrsta kotača kotrlja bez sklizanja po pravcu, pomaknut će se nakon jednog potpunog okreta za dužinu AB, koja je jednaka obodnici toga kruga. Za dužinu AB kažemo, da je *rektificirana kružnica*, a duljina dužine AB je *opseg* onoga *kruga*.

Pokušajmo konstrukcijom rektificirati kružnicu, t. j. razmotati je u pravac!

Ako se svi polumjeri zadane kružnice povećaju (ili umanje) u istom omjeru, krajnje točke novih polumjera leže opet na kružnici, t. j. kružnice su slični likovi; omjer sličnosti jednak je omjeru njihovih polumjera. Svake dvije tetive i svaka dva

kružna luka, koji na različitim kružnicama pripadaju jednakim središnjim kutovima, odnose se kao polumjeri tih kružnica.



Sl. 8.

U slici 8. nacrtali smo polukružnicu polumjera r sa središtem u S_1. Lukovi AB, AC, AD, ... kružnica s polumjerima $2r$, $4r$, $8r$, ... i središtima S_2, S_3, S_4, ..., koji pripadaju redom središnjim kutovima od $\frac{180^0}{2}$, $\frac{180^0}{4}$, $\frac{180^0}{8}$, ..., jednaki su zadanoj polukružnici. Ti se lukovi sve više ispravljaju u pravac pa se po duljini sve manje razlikuju od pripadnih tetiva AB, AC, AD, ..., koje nijesu ništa drugo nego polovine opsega zadanoj kružnici upisanih pravilnih mnogokuta sa 4, 8, 16, ... stranica. *Izlomljena crta* S_2BCD .... ima beskonačno mnogo sve sitnijih dijelova; posljednja njezina točka Z leži na tangenti AT zadane kružnice, pa je dužina AZ jednaka rektificiranoj zadanoj polukružnici.

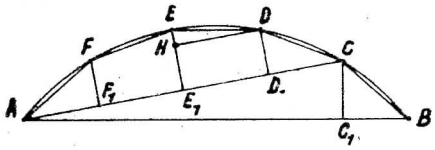
Izlomljena crta BCD... može se konstruirati bez upotrebe središta $S_2, S_3, S_4, \ldots$, jer su kutovi kod S_2, $B, C, D, \ldots$ prema Talesovom poučku pravi, a pravci AB, AC, AD, ... simetrale kutova S_2AT, BAT, CAT, ...

Vidjet ćemo kasnije, da je problem rektifikacije kružnice istovetan s problemom kvadrature kruga, ali ga konstrukcija u sl. 8. ne rješava, jer je za konstrukciju točke Z potreban beskonačan broj dviju osnovnih konstrukcija. Iz sl 8. razabiramo ipak jasno, da se opsezi pravilnih mnogokuta sa 4, 8, 16, ... stranica, upisanih istom krugu, približavaju posve odredenoj *granici*, koja nije veća od opsega zadanoga kruga prema aksiomu, da je dužina najkraća spojnica dviju točaka.

Konstrukcija u sl. 8. ostaje ista, ako mjesto od polukružnice pođemo od ma kojeg dijela zadane kružnice. Hoće li se beskonačni niz opsega pravilnih konveksnih mnogokuta sa n, $2n$, $4n$, ... stranica približavati za svako n istoj granici? Hoće li to biti i onda, ako je početni mnogokut nepravilan, i ako mu broj stranica raste, a stranice bivaju manje po nekom drugom zakonu?

b) Običaj je, da se stranica i opseg pravilnog tetivnog mnogokuta označe sa s_n i o_n, a tangencijalnog sa S_n i O_n. Neka je tetiva $AB = s_n$, a $AC = s_{n+1}$ (sl. 9.)! Ako zadanu kružnicu razdijelimo na n $(n + 1)$ jednakih dijelova, onda je luk BC jedan

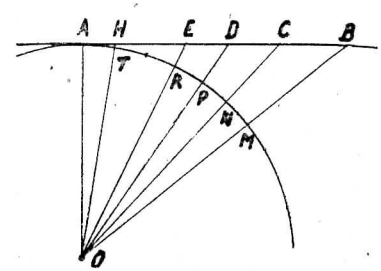
takav dio, dok ih luk AC sadrži n: $CD = DE = \ldots = FA$. Projicirajmo tetivu BC ortogonalno na pravac AB, a njoj jednake tetive CD, DE, ..., FA na pravac AC! Svaka od projekcija: CD_1, $D_1E_1, \ldots$, F_1A veća je od projekcije BC_1 tetive BC, jer je svaki od kutova: DCD_1, $EDH, \ldots$, FAF_1 manji od kuta CBC_1. Odatle izlazi, da je tetiva $AC > n.\ BC_1$. Kako je $AC > AC_1$, to je $AC + BC_1 > AB$. Pomnožimo li posljednju nejednadžbu sa n, nalazimo, da je $n\ AC + n\,BC_1 > n\,AB$, a pogotovo je $n\ AC + AC > n\,AB$, t. j. $(n+1)\,AC > n\,AB$, ili $o_{n+1} > o_n$.



Sl. 9.

Ako se dakle istoj kružnici upišu dva pravilna konveksna mnogokuta, jedan sa n, a drugi sa $(n+1)$ stranicom, opseg je drugoga veći od opsega prvoga.

c) Opišimo zadanoj kružnici dva pravilna konveksna mnogokuta, jedan sa n, a drugi sa $(n+1)$ stranicom! Neka je u sl. 10. pravac AB tangenta zadane kružnice u točki A, a dužina $AB = \frac{1}{2} S_n$, $AC = \frac{1}{2} S_{n+1}$! Ako je O središte kružnice, pa pravac OB siječe kružnicu u M, a pravac OC u N, onda je luk MN jednak n-tom dijelu luka AN. Neka je $MN = NP = PR = \ldots = TA$! Prema poučku, da simetrala nutarnjeg kuta trokuta dijeli suprotnu stranicu u omjeru drugih dviju stranica, vrijedi razmjer $CD : BC = OD : OB$. Budući da je $OD < OB$, to je $CD < BC$; tako izlazi, da je $ED < CD$, i prema tome $ED < BC$, i tako redom do $AH < BC$. Iz tih nejednadžbi dobivamo, da je $AC < n\,BC$. Kako je $n\,AC + n\,BC = n\,AB$, možemo pisati $n\ AC + AC < n\,AB$, ili $(n+1)\,AC < n\,AB$, t. j. $O_{n+1} < O_n$.

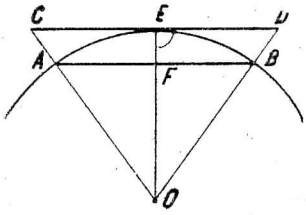


Sl. 10.

Ako se dakle istoj kružnici opišu dva pravilna konveksna mnogokuta, jedan sa n, a drugi sa $(n+1)$ stranicom, onda je drugi po opsegu manji.

d) Krugu $O(r)$ upišimo i opišimo pravilne konveksne mnogokute s 3, 4, 5, ..., $(n-1)$, n stranica! Prema *b*) i *c*) opsezi tetivnih mnogokuta rastu, a tangencijalnih padaju, kad n raste. Kako je opseg svakog tetivnog manji od opsega svakog tangencijalnog mnogokuta, to opseg o_n raste prema određenoj granici g, kad n raste u beskonačnost; time mislimo reći, da razlika $g - o_n$ postaje manja od ma kako malene duljine, ako n postane veće od ma kako velikog broja. Isto tako opsezi tangencijalnih mnokuta padaju prema određenoj granici G. Dokazat ćemo, da je $G = g$.

Neka je $AB = s_n$, $CD = S_n$, $OE = r$ (sl. 11.)! Budući da su pravilni mnogokuti s jednakim brojem stranica slični, to je $O_n : o_n = S_n : s_n = OE :$



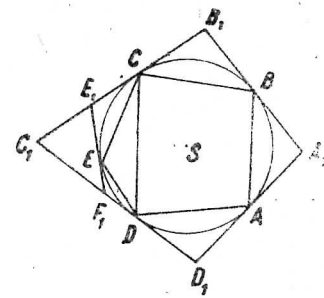
Sl. 11.

$: OF = r : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} =$

$= 1 : \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}$. Kad n raste u beskonačnost, postaje stranica s_n manja od ma kako malene dužine, pa stoga razlomak $\frac{s_n}{2r}$ teži prema nuli, a omjer $O_n : o_n$ prema vrijednosti 1, pa možemo pisati $G : g = 1$, t. j. $G = g$.

e) Upišimo zadanoj kružnici kakav god konveksan mnogokut $ABCD$ (sl. 12.) uz uvjet, da središte S bude njegova nutarnja točka, pa mu broj stranica povećajmo za 1 tako, da mu najveću stranicu CD zamijenimo s druge dvije manje tetive CE i DE! Ako to isto učinimo s najvećom stranicom AB novog mnogokuta $ABCDE$ i tako nastavimo, broj stranica tih konveksnih tetivnih mnogokuta će rasti, a stranice će im bivati sve manje. Dokazat ćemo, da opsezi tako dobivenih mnogokuta rastu prema granici g iz točke *d)*, kad broj stranica n raste u beskonačnost.

Ti opsezi rastu, jer je $CE + DE > CD$, a rastu prema određenoj granici g_1, jer je svaki od njih manji od opsega pripadnog tangencijalnog mnogokuta. Opsezi tih tangencijalnih mnogokuta padaju, jer je prema slici 12. stranica $E_1F_1 < C_1E_1 + C_1F_1$, a padaju prema određenoj granici G_1, jer je opseg svakog od njih veći od opsega pripadnog tetivnog mnogokuta. Ako G ima značenje dano mu u točki *d)*, onda je svakako $g_1 \leqq G$, a $G_1 \geqq g$; svaki naime tetivni konveksni mnogokut leži posve unutar svakog konveksnog tangencijalnog mnogokuta, pa je opseg ovoga veći, što se lahko dokaže po poučku, da je zbroj dviju stranica u trokutu veći od treće.



Sl. 12.

Kako je $G = g$, možemo pisati $g_1 \leqq g \leqq G_1$, ili $1 \leqq \frac{g}{g_1} \leqq \frac{G_1}{g_1}$. Budući da kutovi uz baze istokračnih trokuta: ABA_1, BCB_1, ... teže k nuli, kad n beskonačno poraste, izlazi $G_1 = g_1$, i prema tome je $1 \leqq \frac{g}{g_1} \leqq 1$, t. j. $g = g_1$.

f) Prema točkama *b)* do *e)* možemo dakle reći: Ako se zadanom krugu upiše (ili opiše) beskonačan

niz konveksnih mnogokuta, kojima po nekom zakonu broj stranica raste, a stranice postaju manje od ma kako malene dužine, onda se opsezi tih mnogokuta približavaju posve određenoj granici, koja je za sve takve nizove ista.

Na temelju toga postavljamo ovu *definiciju*:

Opseg kruga jednak je granici, kojoj teže opsezi tome krugu upisanih (ili opisanih) konveksnih mnogokuta, ako im stranice po određenom zakonu postaju manje od ma kako malene dužine.

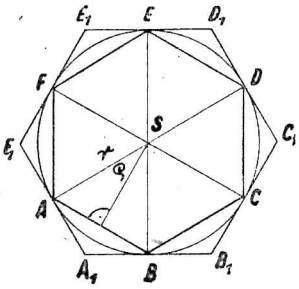
Prema toj definiciji duljina je kružnog luka jednaka granici, kojoj teži duljina izlomljene konveksne crte upisane (ili opisane) tome luku, ako joj stranice po određenom zakonu postanu manje od ma kako malene dužine.

4. Broj π Neka su zadane kružnice s polumjerima $r_1, r_2, r_3, \ldots . r_n$! Budući da su krugovi slični likovi, opsezi su im upravno razmjerni s promjerima, t. j. $\frac{o_1}{2r_1} = \frac{o_2}{2r_2} = \frac{o_3}{2r_3} = \ldots . = \frac{o_n}{2r_n}$. Povodeći se za *Eulerom*, vrijednost tih omjera označujemo malim grčkim slovom π (pi), i prema tome je $o_1 = 2r_1\pi$, $o_2 = 2r_2\pi$, $o_3 = 2r_3\pi, \ldots .$, $o_n = 2r_n\pi$, t. j. ako je r polumjer, opseg je kruga $o = 2r\pi$.

Zadana se kružnica može dakle rektificirati tako, da se nacrta dužina, koja je π puta veća od promjera te kružnice. Tako je problem rektifikacije kružnice sveden na određenje neimenovanog broja π.

5. Kvadratura kruga. Zadanoj kružnici polumjera r upisali smo i opisali pravilni konveksni mnogokut sa n stranica (sl. 13.). Ako površinu prvog označimo sa p_n, drugog sa P_n, a površinu kruga sa P, onda je $p_n < P < P_n$, t. j. $\frac{1}{2}\, o_n\, \varrho_n < P < \frac{1}{2}\, O_n\, r$, gdje je ϱ_n polumjer tetivnom mnogokutu upisane kružnice.

Ako broj n raste u beskonačnost, polumjer ϱ_n teži granici r, a opsezi o_n i O_n zajedničkoj granici $2r\pi$; prema tome površine p_n i P_n teže obje granici $\frac{2r\pi \cdot r}{2} = r^2\pi$, a to je prema posljednjim nejednadžbama površina P kruga.



Sl. 13.

Površina P kruga, kome je polumjer r, računa se dakle po formuli $P = r^2\pi$.

Problem kvadrature kruga sveden je dakle također na određenje broja π, pa je istovetan s problemom rektifikacije kružnice. Rješenje tih problema zavisi o naravi broja π, a da tu upoznamo, valja broju π odrediti numeričku vrijednost. To izračunavanje broja π traje već tisućljeća sve do danas. Zabavimo se i mi njime!

Arhimed

II. Arhimed i njegovi epigoni

1. Arhimedov broj. Zadanom krugu polumjera r upišimo i opišimo konveksan pravilni mnogokut sa n stranica! Opseg o_n prvoga je za opseg kruga jedna od *donjih*, a opseg O_n drugoga jedna od *gornjih granica*, t. j. $o_n < 2r\pi < O_n$. Ako radi jednostavnosti računa uzmemo $r = 1$, onda je $\frac{1}{2} o_n < \pi < \frac{1}{2} O_n$. Prema definiciji opsega kruga te su granice za broj π to uže, što je n veće.

Arhimed polazi od pravokutnog trokuta s kutom od 30^0, kojemu je veća kateta polumjer r kruga, a manja prema tome $\frac{1}{2} S_6$, pa nalazi $r : \frac{1}{2} S_6 > 265 : 153$, uzevši za $\sqrt{3}$ nešto manju vrijednost $\frac{265}{153}$. Raspolavljajući zatim kutove od 30^0, 15^0, $7\frac{1^0}{2}$ i $3\frac{3^0}{4}$ dobiva četiri nova pravokutna trokuta sa zajedničkom katetom r i katetama $\frac{1}{2} S_{12}$, $\frac{1}{2} S_{24}$, $\frac{1}{2} S_{48}$, i $\frac{1}{2} S_{96}$. S pomoću posljednje nejednadžbe, Pitagorina poučka

poučka o simetrali nutarnjeg kuta trokuta i poučaka o razmjerima nalazi redom:

$$r:\frac{1}{2}S_{12} > 571:153,\quad r:\frac{1}{2}S_{24} > 1162\frac{1}{8}:153,$$

$$r:\frac{1}{2}S_{48} > 2334\frac{1}{4}:153,\quad r:\frac{1}{2}S_{96} > 4673\frac{1}{2}:153,$$

$$\text{t. j. } O_{96}:2r < 14688:4673\frac{1}{2} < 3\frac{1}{7}.$$

Polazeći opet od pravokutnog trokuta s kutom od 30^0, komu je hipotenuza promjer kruga $2r$, nalazi $2r:s_{12} < 3013\frac{3}{4}:780$, uzevši za $\sqrt{3}$ nešto veću vrijednost $1351:780$. Na posve isti način kao gore dobiva $2r:s_{96} < 2017\frac{1}{4}:66$, t. j. $o_{96}:2r > 6336:2017\frac{1}{2} > 3\frac{10}{71}$. Tako je Arhimed našao, da je

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Arhimedov broj $3\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$ slabija je približna vrijednost broja π od $3\frac{10}{71}=\frac{223}{71}$, ali je zbog svoje jednostavnosti brzo prodro u sve kulturne zemlje pa se još i danas upotrebljava, kad se ne traži veća

[1]) Arhimedovo djelo „Κύκλου μέτρησις", prevedeno na njemački i opširno kom ntirano, nalazi se u knjizi: Dr. F. Rudio, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre, Leipzig, 1892., str. 73.-81.

točnost. Zato su mnogi Arhimedovi epigoni, tražeći za π bolje približne vrijednosti od njegovih, nastojali, da te vrijednosti prikažu u obliku što jednostavnijeg običnog razlomka, Ali rezultati njihova nastojanja, iako su bolje približne vrijednosti za π, daleko zaostaju za Arhimedovim, jer im autori nisu umjeli da dokažu, pa čak ni da kažu, da li su te njihove vrijednosti donja ili gornja granica za π, ili barem, koliki im je stepen točnosti. Navodim najpoznatije od tih razlomaka: *Apolonije:* $\frac{3927}{1250}$; *Ptolemej:* $\frac{377}{120}$; *Leonardo Pisano:* $\frac{864}{275}$; *Metius:* $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$.

Bolja približna vrijednost za π od Arhimedovih granica jest ma koja srednja vrijednost tih dviju granica. Jedna od srednjih vrijednosti dvaju razlomaka jest razlomak, komu je brojnik jednak zbroju brojnika, a nazivnik zbroju nazivnika zadanih razlomaka. Tim načinom možemo sve navedene razlomke dobiti iz Arhimedovih granica $\frac{223}{71}$ i $\frac{22}{7}$.

Ako se razlomak $\frac{223}{71}$ proširi sa 11, a razlomak $\frac{22}{7}$ sa 67, nalazimo: $\frac{3927}{1250}=\frac{2453+1474}{781+469}$; tako je

$\frac{377}{120} = \frac{223+22\cdot 7}{71+7\cdot 7}$; $\frac{864}{275} = \frac{223\cdot 2+22\cdot 19}{71\cdot 2+7\cdot 19}$; $\frac{333}{106} = \frac{223+22\cdot 5}{71+7\cdot 5}$; $\frac{355}{113} = \frac{223+22\cdot 6}{71+7\cdot 6}$. Metius je povodeći se za Arhimedom našao $\frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120}$ pa je zbrojio brojnike i nazivnike tih razlomaka i dobio $\pi \approx \frac{355}{113}$; ali je i $\frac{377-22}{120-7} = \frac{355}{113}$, kako je našao *Otho*[2]. Do granice $\frac{355}{113}$ može se doći i iz Arhimedova broja $3\frac{1}{7}$, koji je nešto prevelik; ako se za $\sqrt{3}$ mjesto nešto manje vrijednosti $\frac{265}{153}$, kako je uzeo Arhimed, uzme nešto veća vrijednost $\frac{7}{4}$ i piše $3\frac{1}{7} = 3\frac{1}{3+4} > 3\frac{4^2}{7^2+4^3}$, izlazi $\pi \approx 3\frac{16}{113}$, t. j. $\frac{355}{113}$.

2. Relacije između s_n, S_n i s_{2n}. *a)* Prema I. *t.* 3. *d)* je $S_n : s_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$; odatle je

$$S_n = \frac{2rs_n}{\sqrt{4r^2 - s_n^2}} \qquad (1)$$

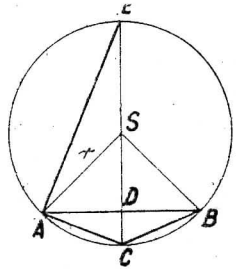
[2]) Dr. J. Tropfke, Geschichte der Elementar — Mathematik, IV. Bd., Berlin und Leipzig 1923., str. 218.

b) Ako je u slici 14. tetiva $AB = s_n$, C sredina manjeg luka AB i CE promjer, onda je $AC = BC = s_{2n}$. Iz pravokutnoga trokuta ACE nalazimo $AC = \sqrt{CE \cdot CD}$, t. j.

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}}. \qquad (2)$$

Tu je formulu izveo ***Aryabhatta***[3]), s pomoću nje odredio opseg o_{384} pa našao za π Apolonijevu približnu vrijednost $\frac{3927}{1250} = 3{,}1416$.

Za $r = 1$ je $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$; stavimo li $4 - s_n^2 = N$, t. j. $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{N}}$, onda je $s_{4n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{N}}}$, $s_{8n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{N}}}}$, pa lako razabiramo, da u izrazu za s_m ima k kvadratnih korijena, ako je $m = 2^k n$ ne računajući $\sqrt{N}$.



Sl. 14.

Kad je $n = 4$, onda je $N = 4 - (\sqrt{2})^2 = 2$; za $n = 6$ je $N = 4 - 1 = 3$; za $n = 5$ je $N = \frac{1}{4}(6 + 2\sqrt{5})$, i t. d.

[3]) E. Beutel, Die Quadratur des Kreises. Leipzig und Berlin, 1942., str. 20.

Za $r = 1$ je $\frac{1}{2} S_n = s_n : \sqrt{N}$, $\frac{1}{2} S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{N}} : \sqrt{2 + \sqrt{N}}$, $\frac{1}{2} S_{4n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{N}}} : \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{N}}}$, i tako dalje.

Kod numeričkog izračunavanja opsega o_n i O_n valja primijeniti t. zv. ***skraćeno računanje***[4] i paziti, da o_n bude doista donja, a O_n doista gornja granica za opseg kruga. Ako je $r = 1$, pa se tako nađeni decimalni brojevi $\frac{1}{2} o_n$ i $\frac{1}{2} O_n$ podudaraju u prvih m decimala, onda tih prvih m decimala ima i broj π. Potrebnu točnost možemo postići najjednostavnije tako, da $\sqrt{N}$ izračunamo na što više decimala. Na pr. $\frac{1}{2} o_{96} = 3{,}1410\ldots$, $\frac{1}{2} O_{96} = 3{,}1427\ldots$, $\pi = 3{,}14\ldots$

Produžujući Arhimedov postupak do pravilnih mnogokuta sa $6 \cdot 2^{16}$ stranica, *Vieta*[5] je odredio prvih 9 decimala broja π. *Ludolf van Ceulen*[6] izračunao je broj π na 35 decimala, našavši prve 32 decimale prema formuli 2) iz opsega pravilnog mnogokuta sa 2^{62} stranica. Evo rezultata njegovog velikog truda:

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50\ 288\ldots$ Kao priznanje broj π je prozvan *Ludolfovim brojem.*

[4] gl. Hočevar—Varićak, Aritmetika i algebra za više razrede srednjih škola, 3. izd. Zagreb, 1913., str. 70.—76. i str. 126—128!

[5] i [6] Beutel, l. c. str. 27. i str. 29.

c) Za $r = 1$ iz formula 1) i 2) nalazimo $\frac{2s_n}{S_n} = \sqrt{4 - s_n^2} = 2 - s_{2n}^2$, t. j. $S_n - s_n = \frac{s_{2n}^2 S_n}{2}$; ako razlomak na desnoj strani proširimo sa n^2 i jednadžbu pomnožimo sa $\frac{1}{2} n$, izlazi $\frac{1}{2}(O_n - o_n) = \frac{o_{2n}^2 O_n}{16n^2}$. Budući da je $o_{2n} < O_n$, možemo pisati

$$\frac{1}{2}(O_n - o_n) < \frac{O_n^3}{16n^2}. \qquad (3)$$

Ako je $n \geqq 24$, onda je $O_n < 6{,}4$, i prema tome je

$$\frac{1}{2}(O_n - o_n) < \frac{2^{14}}{1000n^2}. \qquad 3a)$$

Tako je $\frac{1}{2}(O_{96} - o_{96}) < 0{,}0018\ldots$; doista je $\frac{1}{2}(O_{96} - o_{96}) = 0{,}00168\ldots$; za $n = 6 \cdot 2^{16}$ izlazi $\frac{1}{2}(O_n - o_n) < 1{,}1 \cdot 10^{-10}$; $\frac{1}{2} o_{96}$ podudara se dakle s brojem π u prve dvije decimale, dok se $\frac{1}{2} o_n$ za $n = 6 \cdot 2^{16}$ podudara s njim u prvih 9 decimala, kako je i izračunao Vieta.

S pomoću nejednadžbe 3*a*) možemo dakle ustanoviti, u koliko se prvih decimala $\frac{1}{2} o_n$ podudara

s brojem π, pa $\frac{1}{2} O_n$ ne treba ni izračunati. Iz iste nejednadžbe možemo odrediti n, za koji je razlika na lijevoj strani manja od $\frac{1}{10^k}$. Želimo li na pr., da spomenuta razlika bude manja od 10^{-6}, valja nam uzeti $n \geqq 4048$, kako izlazi iz jednadžbe $\frac{2^{14}}{1000n^2} = 10^{-6}$.

3. Relacije između o_n, O_n, o_{2n} i O_{2n}. *a)* Ako je $r = 1$, onda prema formulama 1) i 2) izlazi $S_{2n} = 2s_{2n} : \sqrt{4 - s^2_{2n}} = 2s_{2n} : \sqrt{2 + \sqrt{4 - s^2_n}} = \frac{2s^2_{2n}}{s_n}$, t. j. $2s^2_{2n} = s_n S_{2n}$. Pomnožimo li tu jednadžbu sa $2n^2$, dobivamo $o_{2n} = \sqrt{o_n O_{2n}}$. 4)

b) Kako je $\sqrt{4 - s^2_n} = \frac{2s_n}{S_n}$, iz $S^2_{2n} = 4s^2_{2n} : (4 - s^2_{2n}) = 2s_n S_{2n} : (2 + \sqrt{4 - s^2_n}) = 2s_n S_{2n} : \frac{2(s_n + S_n)}{S_n}$ izlazi $S_{2n} = \frac{s_n S_n}{s_n + S_n}$. Pomnožimo li tu jednadžbu sa $2n$ pa razlomak na desnoj strani proširimo sa n, nalazimo

$$O_{2n} = \frac{2o_n O_n}{o_n + O_n}. \qquad 5)$$

Ako su dakle poznati o_n i O_n, onda iz 5) možemo odrediti O_{2n}, a zatim iz 4) o_{2n}; iz o_{2n} i O_{2n} dobivamo tako O_{4n} i o_{4n}, i t. d.

Za numeričko izračunavanje broja π formule 4) i 5) zaostaju daleko za formulama 1) i 2) zbog suvišnih međuračuna. Račun je nešto jednostavniji, ako se formule 4) i 5) napišu u obliku

$$\frac{1}{o_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{o_n} \cdot \frac{1}{O_{2n}}} \qquad 6)$$

$$\frac{1}{O_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{o_n} + \frac{1}{O_n}\right) \qquad 7)$$

Time se harmonijska sredina opsega o_n i O_n u formuli 5) zamjenjuje aritmetičkom sredinom njihovih recipročnih vrijednosti u 7).

Ako je u beskonačnom nizu $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots$ $a_1 = O_n$, $a_2 = o_n$, pa je svaki član s neparnim indeksom harmonijska, a svaki s parnim indeksom geometrijska sredina svojih dvaju prethodnih članova, onda je granica toga niza za $r = 1$ broj 2π. Ako je u istom nizu $a_1 = \frac{1}{O_n}$, $a_2 = \frac{1}{o_n}$, pa je svaki neparni član aritmetička, a svaki parni geometrijska sredina svojih dvaju prethodnih članova, onda je za $r = 1$ granica niza $\frac{1}{2\pi}$ (*Schwab-ov niz*)[7].

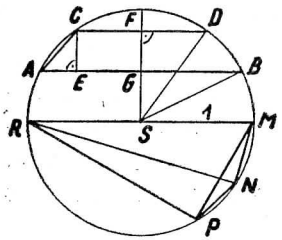
4. Pravilni mnogokuti sa $15 \cdot 2^n$ stranica. *a)* S pomoću pravilnog mnogokuta od $15 \cdot 2^{24}$ stranica

[7] Rouché et Comberousse, Traité de géométrie, Paris 1922, str. 210. i 212.

odredio je *A. van Roomen*[8] broj π na 15 decimala, a Ludolf[9] na 20 s pomoću pravilnog mnogokuta od $15 \cdot 2^{31}$ stranica.

Do izraza za s_{15} možemo doći na dva načina; radi jednostavnijeg računa neka je $r = 1$!

1. način. Ako je $AB = s_3$, $CD = s_5$ i $AB \parallel CD$ (sl. 15.), onda je $AC = s_{15} = \sqrt{AE^2 + CE^2}$; $AE^2 = \frac{1}{4} \cdot (s_3 - s_5)^2$; $CE^2 = FG^2 = (SF - SG)^2 = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{4}s_5^2} - \sqrt{1 - \frac{1}{4}s_3^2}\right)^2$. Kako je $s_5 = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, $s_3 = \sqrt{3}$, izlazi $s_{15} = \frac{1}{2}\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}$.



Sl. 15.

2. način. Ako je $MP = s_6$, $MN = s_{10}$, onda je $NP = s_{15}$ (sl. 15.). Prema Ptolemejovom poučku, koji kaže, da je u tetivnom četverokutu produkt dijagonala jednak zbroju produkata po dviju njegovih nasuprotnih stranica, iz četverokuta $MNPR$, gdje je MR promjer, dobivamo $MR \cdot NP = MP \cdot NR - MN \cdot PR$, t. j. $2s_{15} = s_6\sqrt{4 - s_{10}^2} - s_{10}\sqrt{4 - s_6^2}$. Uvrstimo li $s_6 = 1$, $s_{10} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, dobit ćemo za s_{15} prije nađeni izraz.

Upotrebom formule *2)* možemo odrediti redom izraze za stranice pravilnih mnogokuta sa $15 \cdot 2^n$ stranica.

b) Iz s_5 i s_6 dobivamo po *2.* načinu s_{30}, a po *1.* s_{60}; iz s_{10} i s_{12} dobivamo po *2.* načinu s_{60}, a po prvom s_{120}; iz s_{15} i s_{16} možemo po *2.* načinu naći s_{240}, a po prvom s_{480}.

[8] Tropfke, l. c. str. 216.
[9] Beutel, l. c. str. 29.

III. Četiri elementarne metode za izračunavanje broja π

1. Metoda opsega. Ta je metoda prikazana u odsječku II., a potječe od Arhimeda. Ako je $r = \frac{1}{2}$, broj π je granica niza opsega $o_n, o_{2n}, o_{4n}, \ldots\ldots$ Kad je poznat o_n, niz je određen formulom 2), dok se broj decimala, na koji je izračunat broj π, određuje prema formuli 3). Od 4 niza s početnim članovima o_4, o_6, o_{10}, o_{15} najčešće je po Arhimedovom uzoru upotrebljavan niz s početnim članom $o_6 = 3$.

2. Metoda površina. Da odredimo približno vrijednost broja π, možemo mjesto opsega upotrebiti površine pravilnih mnogokuta. Ako je $r = 1$, onda je $P = \frac{O_n}{2}$, a $p_n = \frac{o_n \varrho_n}{2}$, gdje je $\varrho_n = \frac{1}{2}\sqrt{4 - s_n^2}$.

Uzmemo li r za bazu karakterističnog trokuta pravilnog tetivnog mnogokuta sa $2n$ stranica, onda je $p_{2n} = n \cdot \frac{r s_n}{2} = \frac{o_n r}{2} = \frac{o_n}{2}$, pa možemo pisati

$$o_n = 2p_{2n}, \quad O_n = 2P_n. \qquad 8)$$

Prema tim jednadžbama članovi niza $p_n, p_{2n}, p_{4n}, \ldots\ldots$ rastu, a članovi niza $P_n, P_{2n}, P_{4n}, \ldots$ padaju

prema granici π, kad je $r = 1$; osim toga ti su nizovi istovetni s nizovima, što nam ih daje metoda opsega.

Ako u formule 4) i 5) mjesto opsega uvrstimo površine, dobivamo davno poznate formule

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_n}, \qquad 9)$$

$$P_{2n} = \frac{2P_n p_{2n}}{P_n + p_{2n}}, \qquad 10)$$

koje se mogu pisati i u obliku

$$\frac{1}{p_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{p_n} \cdot \frac{1}{P_n}}, \qquad 11)$$

$$\frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_{2n}} + \frac{1}{P_n}\right) \qquad 12)$$

3. Izoperimetrijska metoda ili metoda jednakih opsega. Da odredi približno broj π, *N. Cusanus* je prvi obrnuo Arhimedov postupak, t. j. mjesto rektifikacije kružnice pokušao je izvršiti *arkufikaciju dužine*[10]. Mjesto da uzme $r = \text{konst.}$, uzeo je, da je opseg o kruga zadan, pa je konstruirao niz pravilnih mnogokuta sa $n, 2n, 4n, \ldots$ stranica, koji svi imaju opseg jednak o.

Ako je n broj stranica pravilnog mnogokuta opsega o, a r_n i ϱ_n polumjeri njemu opisane i upi-

[10] Tropfke, l. c. str. 213.

sane kružnice, onda je $r_n - \varrho_n < \frac{o}{2n}$. Kad n raste, razlika $r_n - \varrho_n$ biva manja od ma kako malene dužine, t. j. r_n i ϱ_n približavaju se istoj granici, koja nije ništa drugo, nego polumjer r kruga, komu je opseg o. Kako je $2r = \frac{o}{\pi}$, vidimo da će r_n i ϱ_n, za $o = 2$, težiti granici $\frac{1}{\pi}$, kad n raste u beskonačnost.

Neka je u slici 16. $AB = s_n$, a O_1D promjer okomit na AB u točki C! Ako je opseg $o = o_n = o_{2n}$, onda je $AB = 2s_{2n}$, $O_1A = 2r_{2n}$ i $O_1C = 2\varrho_{2n}$, t. j.

$$\varrho_{2n} = \frac{1}{2}(r_n + \varrho_n). \qquad 13)$$

Osim toga je po pučku o kateti $O_1A = \sqrt{O_1C \cdot O_1D}$, to jest

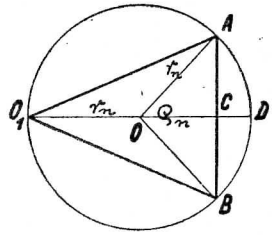
$$r_{2n} = \sqrt{r_n \varrho_{2n}}. \qquad 14)$$

Kad je zadani opseg $o = 2$, Schwab-ovim[11] formulama 13) i 14) određeni niz $\varrho_n, r_n, \varrho_{2n}, r_{2n}, \ldots$ teži granici $\frac{1}{\pi}$, kad n raste u beskonačnost.

Svaki od nizova $\frac{1}{\varrho_n}, \frac{1}{r_n}, \frac{1}{\varrho_{2n}}, \frac{1}{r_{2n}}, \ldots$ istovetan je s jednim od nizova, koje nam daje metoda opsega.

[11] Tropfke, l. c. str. 221.

Ako naime kružnici s polumjerom $r = \frac{1}{2}$ upišemo i opišemo pravilni n-terokut pa opseg prvoga označimo s o'_n, a opseg drugoga s O'_n, onda je pravilni n-terokut opsega $o_n = 2$ njima sličan, pa je $o'_n : 2 = \frac{1}{2} : r_n$ i $O'_n : 2 = \frac{1}{2} : \varrho_n$, to jest $o'_n = \frac{1}{r_n}$, $O'_n = \frac{1}{\varrho_n}$.



Sl. 16.

4. Metoda jednakih površina. Ovom se metodom provodi približna *cirkulatura kvadrata*, t. j. određuje se približno polumjer r kruga, koji je jednak zadanom kvadratu. Ako je površina kvadrata p, onda je $r^2 = \frac{p}{\pi}$.

Pravilnom n-terokutu upišimo i opišimo krug, pa neka je ϱ_n polumjer prvoga, a r_n polumjer drugoga kruga! Ako je površina toga n-terokuta jednaka površini p zadanog kvadrata, onda je $\varrho^2_n\pi < p < r^2_n\pi$. Kad n raste u beskonačnost, površine $\varrho^2_n\pi$ i $r^2_n\pi$ teže zajedničkoj granici $r^2\pi = p$. Uzmemo li dakle $p = 1$, onda je granica niza $\varrho^2_n, r^2_n, \varrho^2_{2n}, r^2_{2n}, \ldots$ broj $\frac{1}{\pi}$.

Da ϱ_{2n} i r_{2n} izrazimo s pomoću ϱ_n i r_n, upišimo i opišimo kružnici polumjera $R = \sqrt{\frac{1}{p}}$ pravilni n-terokut. Ako je površina prvoga p'_n, a drugoga P'_n, onda je na osnovu sličnosti $p'_n : p = R^2 : r^2_n$, a $P'_n : p = R^2 : \varrho^2_n$, i odatle je: $r^2_n = \frac{1}{p'_n}$. $\varrho^2_n = \frac{1}{P'_n}$. Supstitucijom u 11) i 12) nalazimo

$$r^2_{2n} = \varrho_n r_n, \qquad 15)$$

$$\varrho^2_{2n} = \frac{1}{2}(r^2_{2n} + \varrho^2_n) \qquad 16)$$

To su *Legendre — ove formule*[13]. Nizovi brojeva, što nam ih daju te formule, a kojima je granica $\frac{1}{\pi}$, istovetni su s nizovima, što ih daju formule 11) i 12).

Za izračunavanje broja π mogu se upotrebiti sve četiri metode, ali k željenom cilju doći ćemo najbrže i s najmanje truda, ako upotrebimo formule 2) i 3a).

[13] Tropfke, l. c. str. 222.

IV. Huygens

1. De circuli magnitudine inventa. To je naslov Huygensova znamenitog djela[13]. U tom djelu je Huygens dokazao nekoliko stavaka o veličini kruga, kružnice i kružnoga luka. Među tim stavcima dokazao je i ona dva stavka, s pomoću kojih je njegov sunarodnjak *Snellius* iz opsega pravilnih mnogokuta s 2^{30} stranica izračunao π na 34 decimale, dok su Ludolfu opsezi tih mnogokuta dali samo prvih 14 decimala broja π[14].

Huygensovi dokazi su ne samo teški, nego su i teško pisani. U njegovom djelu nema ni jednog znaka računskih operacija, nema ni znakova jednakosti ni nejednakosti, niti kakvih drugih simbola, nego je sve kazano riječima. Huygensove dokaze ne ćemo ovdje ni reproducirati ni komentirati, nego ćemo ih izvesti mnogo jednostavnije i geometrijski i računom.

2. Malo o paraboli. Parabola se obično definira kao geometrijsko mjesto točaka ravnine, koje su od čvrste točke i čvrstog pravca te ravnine jednako

[13] Rudio, l. c. str. 85, — 131.
[14] Beutel, l. c. str. 31.

udaljene; čvrsta točka (u sl. 17. F) zove se *žarište* ili *fokus,* a čvrsti pravac (r) *ravnalica* parabole. Drukčije rečeno parabola je geometrijsko mjesto središta kružnica, koje prolaze fokusom i dotiču ravnalicu. Iz definicije izlazi:

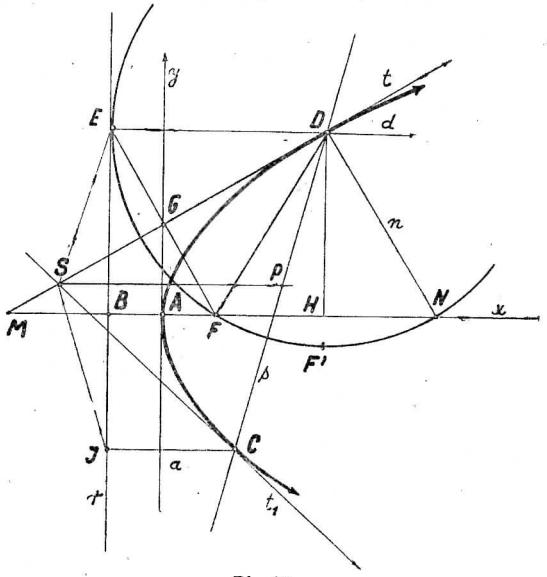
Sve točke parabole leže na onoj strani ravnalice, gdje se nalazi fokus.

Parabola je simetrična s obzirom na pravac $FB \perp r$; taj je pravac os parabole (x). Točka A osi x, koja leži u sredini između fokusa i ravnalice ($BA = AF$), točka je parabole i zove se *vrh* ili *tjeme.* Neizmjerno daleka točka A_1 osi x drugo je tjeme parabole, jer je $A_1F = A_1B$. Stoga se neizmjerno daleki pravac ravnine može uzeti za drugu ravnalicu parabole, pa je onda točka A_1 i drugi fokus i središte parabole, i stoga se svaki pravac, usporedan s osi x, zove *dijametar* parabole.

Ako dijametar d siječe ravnalicu u E, simetrala t dužine EF siječe d u točki D parabole. Osim točke A_1 na svakom dakle dilametru leži još jedna točka parabole. Odatle izlazi, da je parabola neprekinuta crta, koja se zatvara u A_1 pa dijeli ravninu na dva dijela: unutarnji i vanjski; nutarnji je dio onaj, kojemu pripada fokus. Sve točke, koje leže *unutar* parabole, bliže su fokusu nego ravnalici, a one *izvan* su od fokusa dalje.

Da odredimo sjecište nekog pravca s i parabole, valja na s naći središte kružnice, koja dotiče

ravnalicu r i prolazi fokusom F. Ta kružnica mora prolaziti i točkom F', koja je s obzirom na s simetrična sa F. Zadaća se time svela na konstrukciju kružnice, koja prolazi kroz dvije zadane točke i dotiče zadani pravac. Taj zadatak ima dva realna rješenja, jedno ili nijedno. Riješenje je jedno, ako



Sl. 17.

točka F' pripada ravnalici; tako simetrala t dužine FE ima s parabolom samo jednu zajedničku točku D, dok joj sve ostale točke leže izvan parabole, jer

su bliže ravnalici nego fokusu. Pravac t je tangenta parabole; ona raspolavlja vanjski kut među provodnicama DF i DE dirališta D. Vrijedi i obrat, t. j. pravac, koji raspolavlja vanjski kut među provodnicama točke parabole, tangenta je u toj točki, pa odatle izlazi, da se u svakoj točki D parabole može povući tangenta. Povući se može samo jedna, jer je svaki pravac s, koji prolazi točkom D, a nije simetrala kuta EDF, sekanta parabole, i to zbog toga, što točka F' kao točka kružnice D (DE) pada pred ravnalicu.

Tangenta a u tjemenu A raspolavlja spruženi kut FAB i prema tome je usporedna s ravnalicom; kako je $AF = AB$, ona prolazi polovištem G dužine EF. Ako tangenta t siječe os x u M, onda je lik $DEMF$ romb, pa točka G raspolavlja dužinu MD. Povučemo li dakle $DH \perp BF$, onda je $MA = AH$.

Iz predašnjega izlazi, da parabola leži na onoj strani tangente, gdje se nalazi njezin fokus, i da je u svakoj svojoj točki prema vanjskom dijelu ravnine izbočena. Zato sve točke tetive parabole, osim krajnjih, leže unutar parabole.

Pravac n, okomit na tangenti t u diralištu D, zove se *normala* parabole. Ako n siječe os x u točki N, lik $DEFN$ je paralelogram, pa je $NF = ED = HB$, t. j. $NH = FB$. Daljina FB fokusa od ravnalice označuje se obično sa p; duljina $2p$ zove se *parametar* parabole. Dužina NH je subnormala parabole u točki

HUYGENS

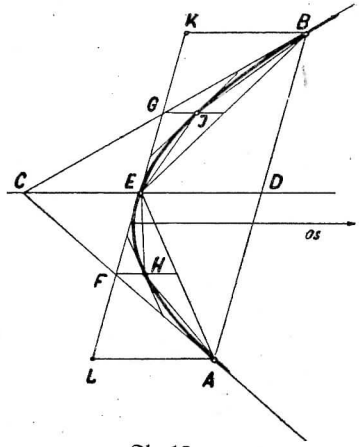
D, pa vidimo, da je *subnormala* parabole konstantna dužina i jednaka p. Ako se dakle na osi x od tjemena A odreže dužina $= p$, onda nutarnjom točkom te dužine, osim osi x, ne prolazi ni jedna normala parabole. Iz pravokutnoga trokuta MDN izlazi $DH^2 = MH \cdot HN = 2AH \cdot NH$. Pišemo li $DH = y$, $AH = x$, za svaku je točku parabole $y^2 = 2px$.

Ako se točkama C i D parabole potegnu tangente t i t_1, i one se sijeku u S, onda je $SE = SF = SI$, i prema tome dijametar parabole, koji prolazi kroz S, prolazi i polovištem P tetive CD, i obrnuto. Iz posljednjih jednadžbi zaključujemo još, da se iz točke izvan parabole mogu na parabolu povući dvije različite tangente, i to samo dvije; kružnica S (SF) siječe ravnalicu u dvije različite točke E i I, jer je udaljenost ravnalice od S manja od SF.

3. Kvadratura paraboličnog odsječka. *a*) Tangente u točkama A i B parabole (sl. 18.) sijeku se u C. Ako dijametar CD siječe parabolu u E, pa tangenta u E siječe AC u F, a BC u G, onda je $AF = FC$ i $BG = CG$. To izlazi iz trokuta ACE i BCE, jer dijametri, koji prolaze kroz točke F i G, raspolavljaju tetive AE i BE. Prema tome je $FG \parallel AB$, $FG = \frac{1}{2} AB$ i $CE = DE$; osim toga je ΔABE najveći trokut, koji se može upisati paraboličnom odsječku ABE.

Površinu paraboličnog odsječka ABE označimo sa P, a trokuta ABC sa P_1! Prema predašnjemu je $\blacktriangle ABE = \frac{1}{2} P_1$, a tangencijalni trapez $AFGB = P_1 - \frac{1}{4} P_1$. Budući da ΔABE leži potpuno unutar odsječka ABE, a ovaj unutar trapeza $AFGB$, možemo pisati

$$\frac{1}{2} P_1 < P < P_1 - \frac{1}{4} P_1.$$



Sl. 18.

Ako dijametri kroz točke F i G sijeku parabolu u H i I, površina je tetivnog peterokuta $ABIEH$ jednaka $\frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{8} P_1$, a pripadnog tangencijalnog šesterokuta $P_1 - \frac{1}{4} P_1 - \frac{1}{16} P_1$, i stoga je

$$\frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{8} P_1 < P < P_1 - \frac{1}{4} P_1 - \frac{1}{16} P_1.$$

Ako tako nastavimo, naći ćemo, da je $\frac{1}{2} P_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) < P < P_1 \left[2 - \left(1 + \frac{1}{4} +\right.\right.$

$+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right)\Big]$. Prema identitetu $(1-x^n):(1-x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$ možemo pisati $\frac{1}{2}P_1\left[\left(1-\frac{1}{4^n}\right):\frac{3}{4}\right]<P<P_1\left[2-\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right):\frac{3}{4}\right]$, t.j.

$$\frac{2}{3}P_1-\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}P_1<P<\frac{2}{3}P_1+\frac{1}{3\cdot 4^n}P_1.$$

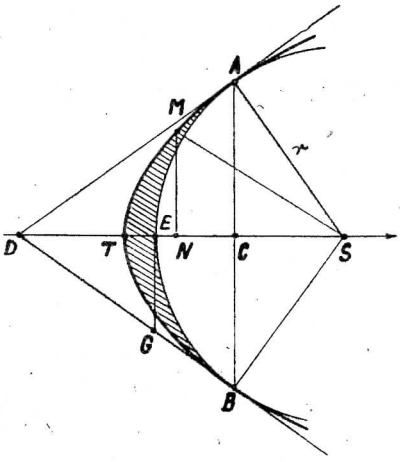
Kad n raste u beskonačnost, izrazi na lijevoj i desnoj strani teže istoj granici $\frac{2}{3}P_1$. Površina je dakle paraboličnog segmenta $P=\frac{2}{3}\Delta ABC=\frac{4}{3}\Delta ABE$. Kako je paralelogram $ABKL=\Delta ABC$, možemo još pisati $P=\frac{2}{3}(ABKL)$.

Tako je znamenitom *metodom ekshaustije* našao Arhimed[15]; da je površini pravilnog 96-erokuta p_{96} pribrojio parabolične segmente, mjesto kružnih, kao što je to učinio *Segner*[16], dobio bi π na 6 decimala točno.

Geometrijski izvod Huygensovih nejednadžbi V. do IX. *a*) Neka je AB (sl. 19.) tetiva kružnice $S(r)$, točka C neka je polovište te tetive, a tangente kružnice u diralištima A i B neka se sijeku u D! Parabola, kojoj je os pravac DS, i kojoj su pravci AD i BD također tangente u diralištima A i B, jednoznačno je određena: njezino je tjeme T polovište dužine CD, a $SC=p$ njezin poluparametar.

[15] Gl. M. Sevdić, Matematička čitanka, Zagreb, 1947., str. 116. — 122.!

[16] Tropfke, l. c. str. 221.

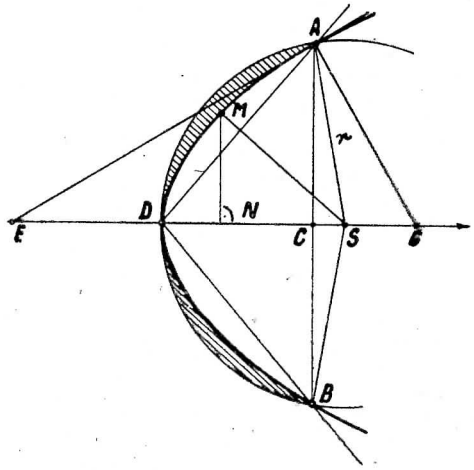


Sl. 19.

Ako je E točka kružnice $S(r)$ na pravcu DS, i $EG\perp DS$, gdje je G točka na tangenti BD, onda je $EG=BG$, i stoga je $CT>CE$, t. j. $ST>r$.

Dokazat ćemo, da ne samo tjeme T nego i svaka točka M luka ATB parabole leži izvan kružnice $S(r)$. Ako je $MN\perp TS$, $MN=y$, $TN=x$, i $ST=a$, onda je $SM^2=y^2+(a-x)^2=x^2-2(a-p)x+a^2$, jer je $y^2=2px$. Pišemo li $SM^2=[x-(a-p)]^2+a^2-(a-p)^2$, vidimo, da SM pada od a do r, kad x raste od nule do $TC=a-p$, t. j. za svaku točku M luka ATB je $SM>r$. Odsječak ABT parabole veći je dakle od kružnog odsječka ABE.

Ako je $AB = s_n$ (sl. 19.), onda je $AD = \frac{1}{2} S_n$ Dodamo li površini p_n n-terostruku površinu paraboličnog odsječka ABT, dobit ćemo površinu veću od površine P kruga, t. j. $P < p_n + n \cdot \frac{2}{3} \triangle ABD$ ili $P < p_n + \frac{2}{3}(P_n - p_n)$, ili $P < \frac{2}{3} P_n + \frac{1}{3} p_n$; to je



Sl. 20.

Huygensov VI. stavak. Za $r = 1$ možemo pisati

$$\pi < \frac{1}{3}(2P_n + p_n). \qquad 17)$$

b) U kružnici $S(r)$ povukli smo tetivu AB (sl. 20.). Neka je C njezino polovište, a D sredina manjeg kružnog luka AB! Parabola, koja prolazi točkama A i B, a točka D joj je tjeme, jednoznačno je određena: pravac CD joj je os, pa ako na toj osi odredimo točke E i G tako, da je $CD = DE$ i $AG \perp AE$, onda je AE njezina tangenta, a $CG = p$ poluparametar. Kako je $2p \cdot CD = AC^2 = 2r \cdot CD - CD^2$, izlazi $CD^2 = 2(r - p) \cdot CD$, t. j. $r > p$.

Ako je M točka na luku AD parabole, i $DN = x$, onda je $SM^2 = [x - (r - p)]^2 + r^2 - (r - p)^2$. Kad x raste od nule do $(r - p)$, SM pada od r do $\sqrt{r^2 - (r - p)^2}$, a kad x raste od $(r - p)$ do $2(r - p) = CD$, onda SM raste od $\sqrt{r^2 - (r - p)^2}$ do r, t. j. luk ADB parabole leži potpuno unutar kružnice $S(r)$ i prema tome je odsječak ABD parabole manji od kružnog odsječka ABD, a jednak je $\frac{4}{3} \triangle ABD$.

Uzmemo li, da je $AB = s_n$, onda je $AD = DB = s_{2n}$. Ako površini p_n dodamo n-terostruku površinu paraboličnog odsječka ABD, dobit ćemo površinu manju od površine P kruga, t. j. $p_n + \frac{4}{3}(p_{2n} - p_n) < P$, ili $\frac{4}{3} p_{2n} - \frac{1}{3} p_n < P$. To je Huygensov V. stavak. Za $r = 1$ je dakle

$$\frac{1}{3}(4p_{2n} - p_n) < \pi. \qquad 18)$$

c) Ako u nejednadžbama 17) i 18) broj n zamijenimo sa $2n$, onda prema jednadžbama 8) možemo pisati

$$\pi < \frac{1}{6}(2o_{2n} + o_n), \qquad 19)$$

$$\frac{1}{6}(4o_{2n} - o_n) < \pi. \qquad 20)$$

Nejednadžba 19) ne dolazi kod Huygensa, ali je specijalni slučaj njegova VIII. stavka; nejednadžba 20) je Huygensov VII. stavak.

Mjesto O_{2n} mogli bismo prema jednadžbi 5) uvrstiti u 19) harmonijsku sredinu opsega o_n i O_n; uvrstimo li mjesto te aritmetičku, t. j. $\frac{1}{2}(o_n + O_n)$, pogotovo je

$$\pi < \frac{1}{6}(2o_n + O_n), \qquad 21)$$

a to je Huygensov IX. stavak.

d) Diferencija granica u 19) i 20) je $D_n = \frac{1}{3}(O_{2n} - 2o_{2n} + o_n)$. Ako obje strane te jednadžbe pomnožimo s $3O_{2n}$ izlazi $3O_{2n} D_n = O^2_{2n} - 2O_{2n} o_{2n} + O_{2n} o_n = (O_{2n} - o_{2n})^2$. Odatle je prema II. $2 \cdot c$) $D_n = \frac{o^4_{4n} O_{2n}}{3 \cdot 2^{10} \cdot n^4}$, t. j. $D_n < \frac{6{,}4^5}{3 \cdot 2^{10} \cdot n^4}$.

Za $n = 96$ dobivamo $D_n < 30^{-5}$ ili $D_n < 4{,}1 \cdot 10^{-8}$. Kako je za $n = 96$ izraz $\frac{1}{6}(4o_{2n} - o_n) = 3{,}141592646088\ldots$, nalazimo prvih 7 decimala broja π, t. j. $\pi = 3{,}1415926\ldots$.

5. Izvod Huygensovih nejednadžbi VII. do XI. računom. *a*) Ako mjesto $o_{4n} = \sqrt{O_{4n} o_{2n}}$ uzmemo harmonijsku sredinu opsega O_{4n} i o_{2n}, onda je $N = \frac{o_{2n} - o_n}{o_{4n} - o_{2n}} < \frac{(o_{2n} - o_n)(O_{4n} + o_{2n})}{(O_{4n} - o_{2n}) o_{2n}}$. Zamijenimo li O_{4n} prema 5) harmonijskom sredinom opsega O_{2n} i o_{2n} i desni razlomak skratimo sa $(O_{2n} - o_{2n})$, izađe $N < \frac{(3O_{2n} + o_{2n}) o_n}{o^2_{2n}} < \frac{4O_{2n} o_n}{o^2_{2n}}$, t. j. $N < 4$.

Ako o_k znači opseg kruga, možemo pisati:

$$\begin{aligned} o_{2n} - o_n &< 4(o_{4n} - o_{2n}), \\ o_{4n} - o_{2n} &< 4(o_{8n} - o_{4n}), \qquad A) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ o_k - o_{mn} &< 4(o_k - o_{2mn}). \end{aligned}$$

Kad te nejednadžbe zbrojimo, dobivamo $o_k < \frac{1}{3}(4o_{2n} - o_n)$, a to je Huygensova nejednadžba VII.

Osim toga iz A) izlazi, da je $4o_{2n} - o_n < 4o_{4n} - o_{2n} < \ldots < 3o_k$, t. j. izraz $\frac{1}{3}(4o_{2n} - o_n)$ raste, kad n raste, a granica mu je o_k.

b) Ako se $O_n - o_n$ napiše u obliku $\left(\frac{2O_n}{O_n + o_n} - 1\right) \cdot (O_n + o_n)$, i razlomak $N = \frac{O_n - o_n}{O_{2n} - o_{2n}}$ zatim proširi

sa o^2_n, dobivamo $N = \frac{(o^2_{2n} - o_n^2)\,(O_n + o_n)}{o_{2n}\, o_n\, (o_{2n} - o_n)} = \frac{(o_{2n} + o_n)\,(O_n + o_n)}{o_{2n}\, o_n}$. Ako u brojniku mjesto O_n pišemo o_{2n}, izlazi $N > 4\left[\frac{o_{2n} + o_n}{2} : \sqrt{o_{2n}\, o_n}\right]^2 > 4$, jer je aritmetička sredina dvaju brojeva veća od geometrijske. Prema tome je $O_n - o_n > 4\,(O_{2n} - o_{2n})$, ili $4\,o_{2n} - o_n > 4\,O_{2n} - O_n$. Prema gore nađenoj Huygensovoj nejednadžbi VII. možemo dakle pisati

$$o_k > \frac{1}{3}\,(4\,O_{2n} - O_n). \qquad 22)$$

Te nejednadžbe nema Huygens.

c) Posve slično nalazimo, da je $\frac{o_{2n} - o_n}{O_{2n} - O_{4n}} = \frac{(O_{2n} + o_{2n})\, o_n}{O_{2n}\, o_{2n}} = \frac{2o_n}{O_{4n}} < 2$, ako O_{4n} prema 5) zamijenimo harmonijskom sredinom opsega O_{2n} i o_{2n}, razlomak proširimo sa o_n i onda skratimo sa $o_{2n} - o_n$. Možemo dakle pisati

$$\begin{aligned} o_{2n} - o_n &< 2\,(O_{2n} - O_{4n}) \\ o_{4n} - o_{2n} &< 2\,(O_{4n} - O_{2n}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ o_k - o_{mn} &< 2\,(O_{2mn} - o_k). \end{aligned} \qquad B)$$

Kad te nejednadžbe zbrojimo, izlazi $o_k < \frac{1}{3}(2O_{2n} + o_n)$, a to je specijalni slučaj Huygensove nejednadžbe VIII.

Osim toga je prema nejednadžbama *B*) $2O_{2n} + o_n > 2O_{4n} + o_{2n} > \ldots > 3o_k$, t. j. izraz $\frac{1}{3}(2O_{2n} + o_n)$ pada, kad n raste, a granica mu je o_k.

Iz VIII. stavka izlazi IX. Huygensov stavak, kako smo vidjeli u IV. 2·*c*).

d) Huygensov X. stavak je jednadžba 4), koju je bez dokaza prvi postavio Snellius[17]).

e) Ako se formula 5) piše u obliku

$$O_{2n} = [\sqrt{O_n o_n} : \tfrac{1}{2}(O_n + o_n)] \cdot \sqrt{O_n o_n},$$

nalazimo, da je $O^2_{2n} < O_n o_n$, jer je izraz u uglatoj zagradi < 1. Pomnoži li se ta nejednadžba s o_n, izlazi $o_n^2 O_n > o^2_{2n} O_{2n}$, pa možemo pisati $\sqrt[3]{o_n^2 O_n} > \sqrt[3]{o^2_{2n} O_{2n}}$. Ta nejednadžba nam kazuje, da izraz $\sqrt[3]{o_n^2 O_n}$ pada, kad n raste; kako je za svako n opseg $o_n < \sqrt[3]{o_n^2 O_n}$, granica je izraza na desnoj strani opseg kruga o_k, kad n raste u beskonačnost, t. j. za svako n je

$$o_k < \sqrt[3]{o_n^2 O_n} \qquad 23)$$

[17]) Gl. Tropfke, l. c. str. 192. Tropfke (str. 219.) označuje X. Huygensov stavak kao XIII. Numeracija u ovoj knjizi provedena je prema već citiranom prijevodu od Rudia.

Posve jednako nalazimo, da je površina kruga

$$P_k < \sqrt[3]{P_n^2 p_n}. \qquad 24)$$

Nejednadžbe 23) i 24) čine Huygensov XI. stavak. Za $r = 1$ je $\frac{1}{2} o_{12} = 3\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $\frac{1}{2} O_{12} = 6(2 - \sqrt{3})$, pa iz 23) izlazi $\pi < 6\sqrt[3]{0{,}143594}$ ili $\pi < 3{,}14190...$

6. Nejednadžbe za $\frac{1}{\pi}$ analogne Huygensovim.

a) Iz nejednadžbi 13) i 14) izveo je *Comberousse*[18] računom nejednadžbe $\frac{1}{3}(4r_{2n} - r_n) < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}(4\varrho_{2n} - \varrho_n)$. Supstitucijom $r_n = \frac{1}{o_n}$, $\varrho_n = \frac{1}{O_n}$ (gl. III. 3.!) dobivamo, da je

$$\frac{1}{3}\left(\frac{4}{o_{2n}} - \frac{1}{o_n}\right) < \frac{1}{o_k} < \frac{1}{3}\left(\frac{4}{O_{2n}} - \frac{1}{O_n}\right) \qquad 25)$$

Na sličan način lako se izvedu i ove nejednadžbe:

$$\frac{1}{o_k} < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{o_n} + \frac{2}{O_{2n}}\right) \qquad 26)$$

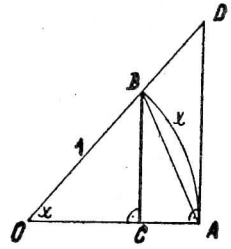
$$\frac{1}{o_k} < \frac{1}{3}\left(\frac{2}{o_n} + \frac{1}{O_n}\right) \qquad 27)$$

Za $r = \frac{1}{2}$ je $\frac{1}{o_k} = \frac{1}{\pi}$.

[18] Rouché et Comberousse, l. ç. str. 214.

V. Rektifikacija kružnog luka

1. Prve granice kružnog luka. Oko vrha O šiljastog kuta AOB (sl. 21.) opisali smo kružnicu s polumjerom $OA = 1$. Ako mjerni broj kuta AOB u radijanima označimo sa x, onda je x i mjerni broj luka AB, a $\frac{x}{2}$ mjerni broj površine kružnog isječka OAB. Ako je C točka pravca OA, a D pravca OB, pa je $AD \perp OA$ i $BC \perp OA$, onda možemo pisati $BC = \sin x$ $OC = \cos x$, $DA = tgx$, razumijevajući pod BC, OC i DA mjerne brojeve tih dužina[19]. Kako je $\triangle OAB$ manji, a $\triangle OAD$ veći od isječka OAB, nalazimo, da je



Sl. 21.

$$\sin x < x < tgx. \qquad 28)$$

Razlomak $\frac{\sin x}{tgx} = \cos x$ teži granici 1, kad x teži k nuli. Razdijelimo li dakle nejednadžbe 28) jedanput sa $\sin x$, a drugi put sa tgx, nalazimo, da i ra-

[19] O svojstvima trigonometr. funkcija i njihovim relacijama gl. jedno od izdanja udžbenika Kurepa-Škreblin, Trigonometrija za više razrede gimnazije, Zagreb!

zlomci $\frac{x}{\sin x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{x}{tgx}$, $\frac{tgx}{x}$ teže granici 1, kad x teži prema nuli. To znači, da se decimalni brojevi $\sin x$, x i tgx podudaraju u to više prvih decimala, što je x manji kut; prema tablicama je na pr. $\sin\frac{\pi}{180} = 0{,}017452$, $tg\frac{\pi}{180} = 0{,}017455$, i prema tome je $\frac{\pi}{180} = 0{,}01745\ldots$, a odatle $\pi = 3{,}141\ldots$

Pođemo li od poznatih funkcija kutova $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{10}$, ... možemo s pomoću adicionih teorema ili s pomoću formula: $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ izračunati funkcije vrlo malenih kutova i onda odrediti π na osnovu nejednadžbi

$$n\sin\frac{\pi}{n} < \pi < n\,tg\frac{\pi}{n}, \qquad 28a)$$

kako je već načinio Vieta[20]. Taj postupak razlikuje se od Arhimedova samo po simbolima.

2. Nejednadžbe za kružni luk analogne onima za opseg kruga. *a)* Neka je u slikama 19. i 20. $\sphericalangle ASB = x$, a polumjer $r = 1$! Iz sl. 20. čitamo, da

[20] Tropfke, l. c. str. 216.

je kružni isječak $SADB$ veći od zbroja odsječka ABD parabole i trokuta ABS, i prema tome

$$\frac{x}{2} > \frac{4}{3}\sin\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad \text{ili}$$

$$\frac{1}{3}\left(8\sin\frac{x}{2}-\sin x\right) < x \qquad 29)$$

U sl. 19. je kružni isječak $SAEB$ manji od zbroja odsječka ABT parabole i trokuta ABS, t. j. $\frac{x}{2} < \frac{2}{3}\left(tg\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, ili

$$x < \frac{1}{3}\left(4tg\frac{x}{2}+\sin x\right). \qquad 30)$$

Nejednadžba 20) je specijalni slučaj nejednadžbe 29), dok je 30) Huygensov VIII. stavak.

Nejednadžbe za kružni luk x dobiju se iz nejednadžbi za opseg o_k kruga supstitucijom: $o_k = 2nx$, $o_n = 2n\sin x$, $O_n = 2ntgx$, $o_{2n} = 4n\sin\frac{x}{2}$, $O_{2n} = 4ntg\frac{x}{2}$. Tako iz 21) i 22) dobivamo nejednadžbe

$$x < \frac{1}{3}(tgx + 2\sin x), \qquad 31)$$

$$\frac{1}{3}\left(8tg\frac{x}{2}-tgx\right) < x. \qquad 32)$$

Nejednadžbu 31) izveo je Huygens posebno kao svoj XII. stavak.

Lijeva nejednadžba 25) daje relaciju

$$x < \frac{3\sin x}{4\cos\frac{x}{2} - 1}, \qquad 33)$$

dok desna nejednadžba 25) pa nejednadžbe 26) i 27) vode do Cusanus-(Snellius-)ove[21] relacije

$$\frac{3\sin x}{2 + \cos x} < x, \qquad 34)$$

koju je Huygens izveo kao svoj XIII. stavak dokazavši s pomoću svog VII. stavka, da je $\frac{3\sin x}{2+\cos x} < \frac{1}{3}\left(8\sin\frac{x}{2} - \sin x\right) < x$. S pomoću nejednadžbi 31) i 34) izračunao je Snellius, kako je spomenuto, broj π na 34 decimale.

b) Nejednadžbi 34) možemo dati jednostavniji oblik. Ako *sin x* i *cos x* izrazimo s pomoću $tg\frac{x}{2}$, dobivamo

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{2}\left(ctg\frac{x}{2} + \frac{1}{3}tg\frac{x}{2}\right). \qquad 34a)$$

Tu nejednadžbu možemo izvesti i ovako:

[21] Tropfke, l. c. str. 213.

Ako formulu $ctg\,2x = \frac{1}{2}ctgx - \frac{1}{2}tgx$ primijenimo na *ctgx* na desnoj strani i zatim redom na $ctg\frac{x}{2}, ctg\frac{x}{4}$, i t. d., dobivamo $ctg\,2x = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{tg\frac{x}{2^n}} - \frac{1}{2}tgx - \frac{1}{4}tg\frac{x}{2} - \frac{1}{8}tg\frac{x}{4} - \cdots - \frac{1}{2^{n+1}} \cdot tg\frac{x}{2^n}$.

Ako je *n* vrlo velko, onda prema V. 1. možemo mjesto $2^{n+1}tg\frac{x}{2^n}$ pisati $2x$, pa dobivamo relaciju (Euler) $\frac{1}{x} = 2\,ctg\,2x + \left(tgx + \frac{1}{2}tg\frac{x}{2} + \frac{1}{4}tg\frac{x}{4} + \frac{1}{8}tg\frac{x}{8} + \cdots\right)$.

Kako je $tg\frac{x}{2} < \frac{1}{2}tgx$, $tg\frac{x}{4} < \frac{1}{4}tgx$, i t. d., izlazi $\frac{1}{x} < 2\,cotg\,2x + \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right)tgx$, t. j. $\frac{1}{x} < 2\,ctg\,2x + \frac{4}{3}tgx$, ili $\frac{1}{x} < ctgx + \frac{1}{3}tgx$.

Pišemo li u Eulerovoj relaciji redom x, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$, ... mjesto tgx, $tg\frac{x}{2}, tg\frac{x}{4}, \ldots$, nalazimo

$$\frac{1}{x} - \frac{4}{3}x > ctgx - tgx. \qquad 35)$$

Za $x = \frac{\pi}{12}$ iz 34*a*) i 35) izlazi $3{,}1402\ldots < \pi < 3{,}1466\ldots$

c) Posebne pažnje vrijedan je Huygensov XI. stavak (nejednadžbe 23. i 24.). On je specijalni slučaj nejednadžbe

$$\sqrt[3]{\sin^2 x \operatorname{tg} x} > x. \qquad 36)$$

Ako je zadan vrlo malen kut α'', tu nejednadžbu možemo pisati u obliku $\sqrt[3]{\sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha} \approx arc\,\alpha$. Zamijenimo li u toj relaciji jedamput $\operatorname{tg}\alpha$ sa $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, a drugi put $\sin\alpha$ sa $\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$, i uvažimo, da je $arc\,\alpha'' = \frac{\pi\alpha}{648000}$, dobivamo

$$\sin\alpha'' \approx \frac{\pi}{648000}\cdot\alpha\sqrt[3]{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha'' \approx \frac{\pi}{648000}\cdot\alpha\sqrt[3]{\frac{1}{\cos\alpha}}.$$

Te se dvije relacije upotrebljavaju kod izračunavanja logaritama sinusa, tangensa i kotangensa kutova između 0^0 i 2^0 pa logaritama kosinusa, tangensa i kotangensa kutova od 88^0 do 90^0.[22]) Iako je formulu 36) postavio već *O. Finaeus*, posljednje su relacije vezane uz ime *Maskelyne-a*.[23])

[22]) Gl. na pr. Schlömilch-Majcen, Logaritmičke tablice, 3. izd. Zagreb, str. 23.

[23]) Tropfke, l. c. 219. — 220.

d) Diferencija D granica u 33) i 34) (ili 34*a*) jednaka je $24\sin x\left(\sin\frac{x}{4}\right)^4 : \left[\left(4\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(2+\cos x\right)\right]$. Kako je za $x \leqq \frac{\pi}{6}$ produkt u uglatoj zagradi veći od 8, možemo pisati

$$D < 3\sin x\left(\sin\frac{x}{4}\right)^4, \qquad 37)$$

ili

$$D < \frac{3}{16}\sin x\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^4, \qquad 37a)$$

jer je $\sin\frac{x}{4} < \operatorname{tg}\frac{x}{4} < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

3. Funkcija tg *x*. *a*) Zadani luk x možemo po volji točno rektificirati tako, da ga rastavimo u što manje lukove pa te lukove rektificiramo s pomoću nejednadžbi 29) do 34*a*) i zbrojimo. Kod rastavljanja luka x u dva manja najzgodnije je upotrebiti funkciju $\operatorname{tg} x$. Ako je $\operatorname{tg} x = m$, pa odaberemo po volji $\operatorname{tg} y = n < m$, onda je $\operatorname{tg}(x-y) = \operatorname{tg} z = \frac{m-n}{1+mn}$; lukove y i z, koji su manji od x, možemo prema 29) do 34*a*) točnije rektificirati, nego sam luk x, a taj onda dobivamo iz jednadžbe $x = y + z$. Da dobijemo x po volji točno, možemo y rastaviti u $y_1 + y_2$, z u $z_1 + z_2$, i t. d.

Kako bi se kod računa uklonili iracionalitetima, možemo upotrebiti formule: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $tg\, x = \frac{2t}{1-t^2}$, ako je $t = tg\, \frac{x}{2}$ racionalan broj.

b) Znamo, da je $\frac{\pi}{4} = arc\, tg\ 1$ (čitaj: luk, komu je tangens jednak 1). Taj luk možemo na različite načine rastaviti na manje lukove, kojima su tangensi racionalni brojevi. Račun rektifikacije je jednostavniji, ako među tim manjim lukovima ima jednakih, i ako su im tangensi razlomci s brojnikom 1. Na pr.

$$\frac{\pi}{4} = arc\, tg\, \frac{1}{2} + arc\, tg\, \frac{1}{3} = 2\, arc\, tg\, \frac{1}{3} + arc\, tg\, \frac{1}{7} =$$

$$= 3\, arc\, tg\, \frac{1}{7} + 2\, arc\, tg\, \frac{1}{8} + 2\, arc\, tg\, \frac{1}{18} = \ldots$$

Gauss nalazi[24])

$$\frac{\pi}{4} = 12\, arc\, tg\, \frac{1}{38} + 20\, arc\, tg\, \frac{1}{57} + 7\, arc\, tg\, \frac{1}{239} +$$

$$+ 24\, arc\, tg\, \frac{1}{268}.$$

Upotrebit ćemo formulu

$$\frac{\pi}{4} = 10\, arc\, tg\, \frac{1}{37} + 5\, arc\, tg\, \frac{1}{41} + 2\, arc\, tg\, \frac{1}{43} +$$

$$+ 10\, arc\, tg\, \frac{1}{46} + 2\, arc\, tg\, \frac{1}{68} + 10\, arc\, tg\, \frac{1}{100}.$$

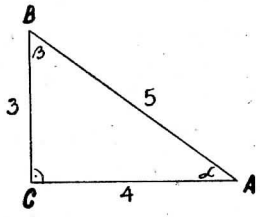
[24]) Bentel, l. c. str. 40.

Ako zbrojimo tangense tih lukova, onda prema 28) izlazi $\frac{\pi}{4} < \frac{10}{37} + \frac{5}{41} + \frac{2}{43} + \frac{10}{46} + \frac{2}{68} + \frac{10}{100}$, ili $\pi < 3{,}14212\ldots$ Razlika je granica u 28) $tg\, x - \sin x = 2\, tg\, x \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{1}{2} tg^3 x$. S pomoću logaritama lako nađemo, da je razlika tih granica u našem primjeru $D < 0{,}00083$, i prema tome $\pi > 3{,}14129\ldots$. Kako se vidi, nađene su granice uže od Arhimedovih. Upotrebimo li nejednadžbu 34*a*), nalazimo, da je $\pi > 3{,}1415925740$; prema 37*a*) je razlika $D < 1815 \cdot 10^{-10}$, pa izlazi $\pi < 3{,}1415927555$.

4. Određivanje broja π s pomoću Heronovog trokuta. *a*) Svaki trokut, komu su mjerni brojevi stranica i površine racionalni brojevi, zove se *Heronov trokut*; u takvom su trokutu i mjerni brojevi visina, pa polumjera r i ϱ također racionalni brojevi. Svaki pravokutni trokut, kojemu su mjerni brojevi stranica racionalni brojevi, Heronov je trokut. Kako svaka visina dijeli Heronov trokut u takva dva pravokutna trokuta, kosokutni Heronov trokut dobije se najjednostavnije spajanjem dvaju pravokutnih Heronovih trokuta, koji se podudaraju u jednoj kateti.

b) Najpoznatiji Heronov pravokutni trokut je onaj, komu su katete $a = 3$, $b = 4$, a hipotenuza

$c = 5$ (sl. 22.). Nalazimo, da je $tg\,\alpha = \frac{3}{4}, tg\,\beta = \frac{4}{3}$,



Sl. 22.

$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, $tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}$, $tg\,\frac{3\beta - 2\alpha}{2} = \frac{3}{79}$, $tg\,\frac{7\alpha - 10\beta}{2} = \frac{24478}{873121}$. Prema vrijednosti tangensa vidimo, da su posljednja dva kuta maleni kutovi pa prema 34*a*) nalazimo:

$$3\beta - 2\alpha > 0{,}0759128763$$
$$7\alpha - 10\beta > 0{,}0560554379.$$

Ako prvu nejednadžbu pomnožimo sa 18, a drugu sa 5, zbrojimo i zbroj pomnožimo sa 2, izlazi $\pi > 3{,}141591732$.

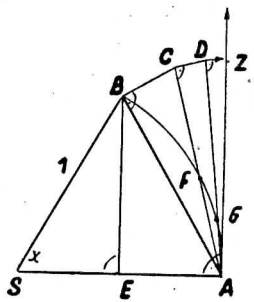
c) Heronov trokut, komu su mjerni brojevi stranica najmanji cijeli brojevi, jest trokut sa stranicama: $a = 13$, $b = 14$ i $c = 15$. Za njegove kutove α, β, γ naći ćemo: $tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, $tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{4}{7}$, $tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{2}{3}$, i $tg\,\frac{\alpha + \gamma - 2\beta}{2} = \frac{7}{524}$, $tg\,\frac{4\alpha + \beta - 4\gamma}{2} = \frac{148}{6811}$, $tg\,\frac{2\beta + 3\gamma - 6\alpha}{2} = \frac{46}{2253}$. Ako na posljednja tri kuta, koji su maleni, primjenimo formulu 34*a*), dobivamo:

$$\alpha - 2\beta + \gamma > 0{,}0267159680$$
$$4\alpha + \beta - 4\gamma > 0{,}0434522713$$
$$-6\alpha + 2\beta + 3\gamma > 0{,}0408287696.$$

Pomnožimo li prvu nejednadžbu s 37, drugu s 27 i treću s 24, pa zbrojimo, izlazi $\alpha + \beta + \gamma = \pi > 3{,}141592611$.

VI. Geometrija je dio mehanike (Newton)

1. Prvi beskonačni produkt. U slici 8. prikazana je približna rektifikacija polukružnice. Na posve jednak način možemo približno rektificirati svaki zadani luk x (sl. 23.). Neka je polumjer kružnice $r = 1$! Ako je F polovište luka $AB = x$, C točka pravca AF, i $BC \perp AB$, onda je $AC = 2AF$; ako je G polovište luka AF, D točka pravca AG, $CD \perp AC$, onda je $AD = 4AG$. Ako tako nastavimo, posljednja točka Z slomljene crte $BCD\ldots$ pripadat će tangenti kružnice u A, pa je $AZ = x$.



Sl. 23.

Iz pravokutnih trokuta BES i BEA nalazimo: $BE = \sin x$, $AB = BE : \cos\frac{x}{2}$, a kako je $\sphericalangle BAZ = \frac{x}{2}$, $\sphericalangle BAC = \frac{x}{4}$, $\sphericalangle CAD = \frac{x}{8}$, dobivamo: $AC = AB : \cos\frac{x}{4}$, $AD = AC : \cos\frac{x}{8}$, i t. d. Prema tome je

$$AZ = x = BE : \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots., \text{ ili}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots. \qquad 38)$$

Za $x = \frac{\pi}{2}$ izlazi

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots.$$

To je prvi beskonačni produkt; našao ga je Vieta[25].

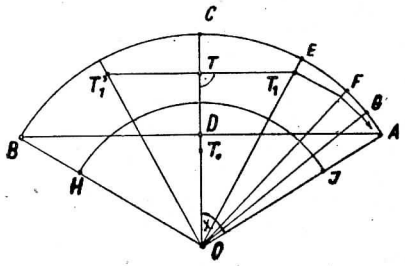
Jednadžba 38) lako se izvodi računom: $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} = \ldots\ldots\ldots = m\sin\frac{x}{m}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots.$ Kad je $m = 2^n$ vrlo veliko, možemo $m \cdot \sin\frac{x}{m}$ pisati $= x$, pa izađe 38).

2. Težište kružnoga luka i kružnoga isječka. *a)* Kad se govori o *težištu* crta ili ploha, onda zamišljamo, da su prevučene tankim slojem homogene tvari jednake debljine.

Neka je polumjer $OA = 1$, luk $AB = 2x \leqq \pi$, C sredina luka AB, a D tetive AB! Težište luka AB leži na njegovoj simetrali OC. Ako su T_1 i T_1' težišta lukova AC i BC, onda pravac T_1T_1' ide kroz

[25] Tropfke, l. c. str. 216.

T i okomit je na OT. Kako T_1 leži na simetrali OE luka AC, izlazi $OT = OT_1 \cos\frac{x}{2}$. Ako je T_2 težište luka AE, onda je $OT_1 = OT_2 \cos\frac{x}{4}$, t. j. $OT = OT_2 \cdot \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{4}$. Budući da je težište posljednjeg luka $\frac{AC}{2^n}$ u točki A, dobivamo da je $OT = \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{4} \cos\frac{x}{8} \ldots\ldots$ Prema 38) je dakle



Sl. 24.

$$OT = \frac{\sin x}{x}. \qquad 39)$$

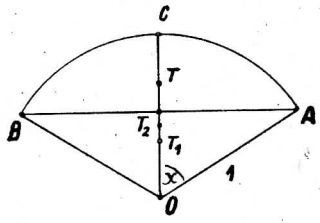
Kako je $x < tg\, x$, to je $\frac{\sin x}{tg\, x} = \cos x = OD < OT$, t. j. težište T leži između točaka C i D.

b) Da odredimo težište kružnog isječka $O\,(ACB)$, rastavimo ga u vrlo uske sukladne kružne isječke OAG, OGF, i t. d. Te isječke možemo smatrati istokračnim trokutima, pa sva njihova težišta leže na luku HJ sa središtem u O i polumjerom $OH = \frac{2}{3}$. Težište T_0 luka HJ je težište isječka $O\,(ABC)$, a

kako je luk HJ zbog sukladnosti spomenutih uskih isječaka svuda jednako debeo, izlazi

$$OT_0 = \frac{2}{3}\frac{\sin x}{x}. \qquad 40)$$

3. Težište kružnoga odsječka. U slici 25. je T_1 težište trokuta OAB, T_2 težište kružnoga isječka $O\,(ACB)$, a T težište kružnog odsječka ABC, dok je polumjer $OA = 1$. Po zakonu poluge vrijedi razmjer



Sl. 25.

$P_1 : S = T_2T : T_1T_2$, ako je P_1 površina trokuta OAB, a S površina odsječka ABC. Kako je $OT_1 = \frac{2}{3} OD = \frac{2}{3} \cos x$, $OT_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin x}{x}$, možemo pisati: $\sin 2x : (2x - \sin 2x) = \left(3\,TO - \frac{2 \sin x}{x}\right) : \left(\frac{2 \sin x}{x} - 2 \cos x\right)$, ili $\sin 2x : 2x = \left(3\,TO - \frac{2 \sin x}{x}\right) : (3\,TO - 2 \cos x)$. Odatle izlazi

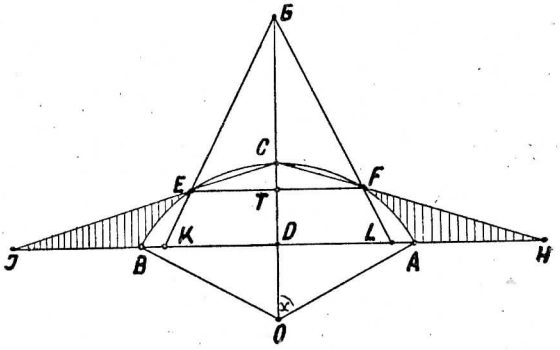
$$OT = \frac{2 \sin^3 x}{3(x - \sin x \cos x)}. \qquad 41)$$

Ako je tetiva $AB = s$, onda je $\sin^3 x = \frac{s^3}{8}$, pa je

$$OT = \frac{s^3}{12\,S}. \qquad 41a)$$

4. Izvod jedne Huygensove, jedne nove i Cusanusove nejednadžbe. *a*) Neka je T težište kružnoga odsječka ABC i D polovište tetive AB (sl. 26.)! Kako kružni odsječak ABC leži sav iznad tetive AB, a ispod tangente kružnice u C, točka T leži između C i D, t. j. $OT > OD$. Ako je polumjer $OA = 1$, $\sphericalangle AOD = x$, onda je $OD = \cos x$, pa nejednadžba $OT > \cos x$ prelazi u ekvivalentnu $2x < \frac{1}{3}(4tg\,x + \sin 2x)$, a to je Huygensoya nejednadžba 30).

b) Težištem T (sl. 26.) povukli smo pravac $EF \parallel AB$; E i F su točke luka ACB, a H i I točke u kojima pravci CE i CF sijeku pravac AB. Kako



Sl. 26.

zajedničko težište kružnih odsječaka, odrezanih tetivama CE i CF, leži iznad T, mora težište kružnom odsječku ACB i trokutu CHI zajedničkog dijela ležati ispod T (po zakonu poluge). Ako se taj zajednički dio odbije od trokuta CHI, preostala dva dijela leže ispod pravca EF, pa i njihovo težište, a prema tome i težište trokuta CHI leži ispod T, i to na dužini CD (zbog simetrije). Možemo dakle pisati: $OT > OD + \frac{1}{3}CD$, ili $OT > \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos x$. Ta je nejednadžba ekvivalentna s nejednadžbom

$$x < \frac{\sin x\,(2 + \cos x)}{1 + 2\cos x}. \qquad 42)$$

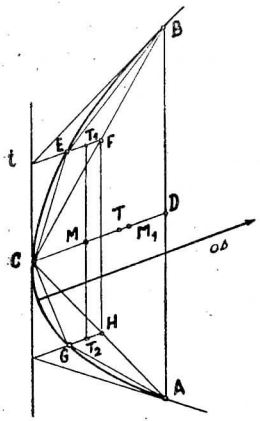
Za $x = \frac{\pi}{6}$ dobivamo $\pi < 3{,}147\ldots$.

c) Ako je G točka, kojom prolaze tangente kružnice s diralištima u A i B, onda pravci GE i GF sijeku pravac AB u točkama K i L, koje pripadaju tetivi AB. Na posve jednak način kao pod *b*) izlazi, da težište trokuta GKL leži iznad T, i to na pravcu OT. Iz nejednadžbe $OT < OD + \frac{1}{3}DG$ ili $OT < \frac{3 - 2\sin^2 x}{3\cos x}$ izlazi, kad uredimo, Cusanusova nejednadža $\frac{3\sin 2x}{2 + \cos 2x} < 2x$.

5. Težište paraboličnog odsječka. Kao što težište trokuta leži na težišnici, jer ta raspolavlja sve du-

žine, usporedne sa stranicom, koja pripada težišnici, tako i težište T paraboličnog odsječka leži na dijametru, koji prolazi središtem D međašne mu tetive, i to između C i D, gdje je C točka parabole (sl. 27.).

Položaj težišta T određen je omjerom $DT : DC$; lako razabiramo, da je taj omjer za sve parabolične odsječke jednak po vrijednosti. Točka T je naime zajedničko težište najvećih trokuta, koji se mogu upisati paraboličnim odsječcima ABC, ACG, BCE i t. d u beskonačnost; položaj težišta tih trokuta na težišnicama $CD, GH, EF, \ldots$ određen je stalnim omjerom $2:1$, a omjeri njihovih površina za sve su parabolične odsječke redom jednaki. Ako su dakle T_1 i T_2 težišta paraboličnih odsječaka BCE i ACG, onda je prema prednjem $T_1F = T_2H$, i stoga je $T_1T_2 \parallel FH \parallel AB$, a jer su odsječci BCE i ACG po površini jednaki, njihovo zajedničko težište M leži na dužini CD.



Sl. 27.

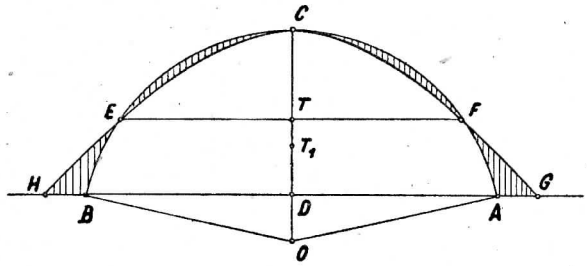
Ako je M_1 težište trokuta ABC, onda je po zakonu poluge $MT : M_1T = \triangle ABC : \frac{1}{3} \triangle ABC = 3 : 1$, t. j. $MT = 3M_1T$, ili $DM - DT = 3(DT - DM_1)$. Kako je

$DT : FT_1 = CD : EF = 4 : 1$, a $DM_1 = \frac{1}{3} CD$, to je $DM - DT = \frac{1}{2} CD + FT_1 - DT = \frac{1}{2} CD + \frac{1}{4} DT - DT = \frac{1}{2} CD - \frac{3}{4} DT$. Iz jednadžbe $\frac{1}{2} CD - \frac{3}{4} DT = 3\left(DT - \frac{1}{3} CD\right)$ izlazi

$$DT = \frac{2}{5} CD. \qquad 43)$$

Tako je našao Arhimed.

6. Izvod Huygensova XVI. stavka i Newtonove nejednadžbe. *a)* Neka je $OA = 1$ polumjer, C sredina manjeg kružnog luka AB, a T težište kružnog odsječka ABC (sl. 28.))! Kroz T povucimo pravac $EF \parallel AB$, a E i F neka su točke kružnog luka ABC! Ako točkama F, C i E položimo parabolu, kojoj je



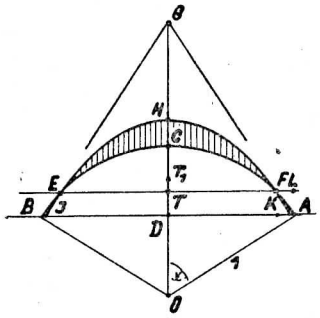
Sl. 28.

os OC, i ta parabola siječe pravac AB u točkama H i G, onda, kako od prije znamo, luk FCE te parabole leži unutar kružnog odsječka EFC, a točke G i H izvan duži e AB. Odsječci — kružni ABC i parabolični GHC — imaju zajednički dio; njegovo težište leži na dužini CD, i to ispod T, jer zajedni ko težište procrtanih dijelova (CE) i (FC) kružnoga odsječka leži na CD iznad T.

Težište T_1 paraboličnog odsječka GHC leži na CD, ali ispod T, jer i težište spomenutog zajedničkog dijela i zajedničko težište procrtanih dijelova AFG i BEH leži ispod T.

Prema tome je $OT_1 < OT$, ili $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cos x < OT$. Iz te nejednadžbe dobivamo

$$x < \frac{\sin x\,(10 + 6\cos x - \cos^2 x)}{3\,(2 + 3\cos x)}. \qquad 44)$$



Sl. 29.

To je Huygensov XVI. stavak. Kod izvođenja toga stavka i Huygens upotrebljava težište paraboličnog odsječka.

b) Neka je opet $OA = 1$ polumjer, C sredina manjeg kružnog luka AB, a T težište kružnog odsječka ABC (sl. 29.)! Pravac $EF \parallel AB$ neka prolazi kroz T, a E i F neka su točke kružnog luka ACB! Ako tangenta kružnice u točki A siječe pravac OC u G, a H je sredina dužine DG, onda je, kako znamo, $DH > DC$.

Položimo točkama E, H i F parabolu, kojoj je os OH! Ako su I i K točke, u kojima ona siječe pravac AB, a $2p$ njezin parametar, onda je $FT^2 = 2p \cdot HT$, $KD^2 = 2p \cdot DH$. Prema (VI., 4.) točka H je tjeme i one parabole, koja kružnicu $O(OA)$ dotiče u točkama A i B. Ako je $2p_1$ njezin parametar, a L točka, u kojoj ona siječe pravac EF, onda je $LT^2 = 2p_1 \cdot TH > TF^2$, jer točka L leži izvan kružnice $O(OA)$. Odatle izlazi, da je $2p_1 > 2p$, i stoga je $AD^2 = 2p_1 \cdot DH > DK^2$, t. j. točke I i K pripadaju tetivi AB.

Težište T_1 paraboličnog odsječka IKH leži iznad T, jer težišta njegovih dijelova: $IKFCEI$ i $ECFHE$ leže na CD iznad T. Prema tome je $OT < OT_1$, t. j. $OT < OD + \frac{2}{5} DH$. Kako je $DH = \frac{1}{2} DG = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \cdot \sin x$, iz nejednadžbe $OT < \cos x + \frac{1}{5} \operatorname{tg} x \sin x$, ako $2x$ zamijenimo sa x, izlazi

$$\frac{\sin x\,(14 + \cos x)}{3\,(3 + 2\cos x)} < x. \qquad 45)$$

Tu je nejednadžbu izveo Newton[26] s pomoću beskonačnih redova za $\sin x$ i $\cos x$.

[26] Bentel, l. c. str. 36.

Za $x = \frac{\pi}{12}$ nejednadžbe 44) i 45) daju za π ove granice: $3{,}1415922\ldots < \pi < 3{,}141595\ldots$

Bilješka 1. Ako razlomak nejednadžbe 34) proširimo sa 4 pa, imitirajući Metiusa, pribrojimo njegovom brojniku i nazivniku brojnik i nazivnik razlomka u 42), dobivamo razlomak u 45).

Bilješka 2. Svojoj gornjoj granici u 44) Huygens daje adekvatnu donju granicu

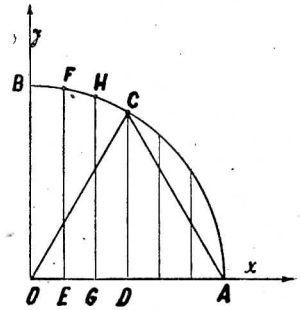
$$\frac{\sin x\,(60 + 134\cos x + 32\cos^2 x - \cos^3 x}{44 + 92\cos x + 89\cos^2 x} > x.$$

Huygens tu nejednadžbu ne dokazuje, nego samo veli, da ju je našao baveći se određivanjem težišta ploha. Za $x = \frac{\pi}{6}$ po toj formuli izlazi

$\frac{3(672 + 533\sqrt{3})}{2(443 + 184\sqrt{3})} = 3{,}14137\ldots < \pi$, dok po Newtonovoj u 45) nalazimo $\frac{81 - 25\sqrt{3}}{12} = 3{,}14156\ldots < \pi$.

VII. Na pragu više matematike

1. Izračunavanje površine kruga s pomoću trapeza. *a*) U pravokutnom koordinatnom sustavu xOy (sl. 30.) nacrtali smo kvadrant OAB kruga, kojemu je središte u ishodištu O, a polumjer $OA = 10$. Da odredimo približno površinu toga kvadranta razdijelimo OA na n jednakih dijelova pa djelištima potegnimo ordinate pripadnih točaka kružnice! Ako te ordinate, počevši sa OB označimo redom sa $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$, onda je zbroj površina trapeza $OEFB$, $EGHF$ ....., t. j.



Sl. 30.

$$\frac{OA}{2n}\left[y_0 + 2\left(y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1}\right) + y_n\right]$$

to bliže površini P kradranta, što je n veći.

Ako je $OD = \frac{1}{2}\,OA$, onda je pravokutni trokut ACD polovina istostraničnog trokuta OAC, i prema

tome $CD = OD\sqrt{3}$, a kružni isječak OBC jednak je $\frac{1}{12}$ kruga.

Razdijelimo OD na 10 jednakih dijelova! Ordinate točaka kružnice, potegnute u djelištima, jesu redom: $y_0 = OB = 10$, $y_1 = \sqrt{99{,}75}$, $y_2 = \sqrt{99}$, ..., $y_{10} = CD = 5\sqrt{3}$, po nalazimo:

$$\frac{100\pi}{12} > \frac{1}{4}\left[y_0 + 2\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_9\right) + y_{10}\right] - \triangle OCD.$$

Kad izračunamo, izlazi $\pi > 3{,}14015$.

b) Ako u točkama, kojima su ordinate; $y_1, y_3, y_5, \ldots$, potegnemo tangente na kružnicu pa zbrojimo površine trapeza, kojima su $y_1, y_3, y_5, \ldots$, srednjice, a visina $2\,OA : n$, dobit ćemo novu približnu vrijednost površine kvadranta, koja ja je to točnija, što je n veće. U našem je primjeru $2.\frac{OA}{n} = 1$, pa ako tako odredimo površinu kružnog dijela $OBCD$ i od nje odbijemo $\triangle OCD$, nalazimo $\pi < 3{,}14447\ldots$

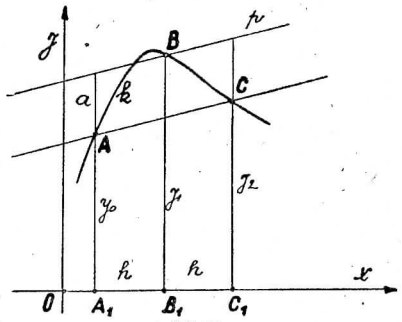
Tako smo s malo truda odredili dvije prve decimale broja π. Prednost je gornje metode u tome, što se ona može primijeniti na izračunavanje površine dijela ravnine, koji je s jedne strane omeđen lukom ma koje krivulje.

2. Simpsonovo pravilo. U praksi se vrlo često primjenjuje t. zv. *Simpsonovo pravilo*[27], po kojem

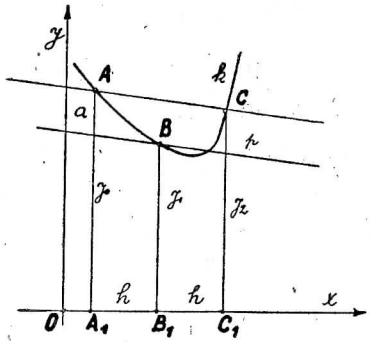
[27] T. Simpson (1710. — 1761)

se uz isto n dobiju znatno točniji rezultati nego metodom trapeza.

Neka su $AA_1 = y_0$, $BB_1 = y_1$, $CC_1 = y_2$ ordinate točaka A,B i C krivulje k, i neka je $A_1B_1 = B_1C_1 =$



Sl. 31.



Sl. 32.

$= h$ (sl. 31. i 32.)! Ako točke A i C spojimo dužinom i krajnjom točkom B srednje ordinate y_1 po-

vučemo pravac $p \parallel AC$, pravci AA_1, p, CC_1 i AC zatvaraju paralelogram, komu smo jednu stranicu označili sa a, a druga je AC.

Položimo točkama A, B i C luk parabole, kojoj je os usporedna s osju ordinata! Površina odsječka ACB te parabole jednaka je $\frac{2}{3}$ površine spomenutog paralelograma, t. j. $\frac{4}{3} a h$. Kako je u sl. 31. $a = y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}$, ta je površina jednaka $\frac{h}{3}[4y_1 - 2(y_0 + y_2)]$; u sl. 32. je $a = \frac{y_0 + y_2}{2} - y_1$, pa je površina odsječka ACB parabole $\frac{h}{3}[2(y_0 + y_2) - 4y_1]$.

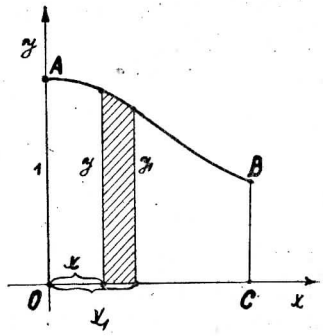
Površina p_1 dijela ravnine, omeđenog lukom krivulje k, ordinatama y_0 i y_2 pa osju apscisa, u prvom slučaju je približno jednaka $\frac{y_0 + y_2}{2} 2h + \frac{h}{3} \cdot [4y_1 - 2(y_0 + y_2)]$, a u drugom $\frac{y_0 + y_2}{2} \cdot 2h - \frac{h}{3} \cdot [2(y_0 + y_2)] - 4y_1]$. Ako se ti izrazi reduciraju, površina je $p_1 \approx \frac{h}{3}(y_0\ 4 + y_1 + y_2)$. Površina dijela, koji je omeđen ordinatama y_2 i y_4, lukom krivulje i osju apscisa, je $p_2 \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$, i prema

tome je $p_1 + p_2 \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4]$. Ako je dakle posljednja ordinata y_{2n}, površina P dijela ravnine, omeđenog lukom krivulje k, ordinatama y_0 i y_{2n} pa osju opscisa, dana je približno izrazom

$$P \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}] \qquad 46)$$

To je Simpsonovo pravilo. Ako ga primijenimo na krug u t. 1., izlazi $\pi \approx 3{,}14159140\ldots$

3. Izračunavanje broja π s pomoću drugih krivulja. Numeričko rješenje mnogih matematičkih problema zavisno je o broju π. Izračunavanje površina ravnih likova koji su omeđeni lukom neke krivulje, ordinatama krajnjih točaka luka i osju apscisa, vodi često do izraza, koji sadržavaju broj π. Navest ćemo dva primjera.



Sl. 33.

Primjer 1. U pravokutnom koordinatnom sustavu xOy (sl. 33.) nacrtajmo onaj luk krivulje $y = \frac{1}{1 + x^2}$, koji spaja točke $A(0,1)$ i $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, pa od-

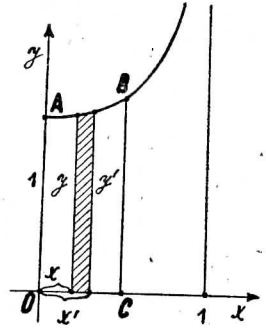
redimo površinu lika, što ga omeđuju ordinate OA i CB, luk AB krivulje i os apscisa! Površina procrtanog trapeza je $p = \frac{y + y_1}{2}(x_1 - x)$. Ako je taj trapez vrlo uzak, možemo pisati $p = y(x_1 - x)$. Zamijenimo li apscise x i x_1 tangensima nove variable z i pišemo $x = tg\,z$, $x_1 = tg\,z_1$, onda je $p = y\,(tg\,z_1 - tg\,z) = y \cdot \frac{sin(z_1 - z)}{cos\,z_1\,cos\,z}$; osim toga je $y = \frac{1}{1 + tg^2 z} = cos^2 z$. Kako se prema našoj pretpostavci z_1 i z vrlo malo razlikuju, možemo mjesto $cos\,z_1\,cos\,z$ pisati $cos^2 z$, a mjesto $sin\,(z_1 - z)$ razliku $z_1 - z$, i prema tome je $p = z_1 - z = arc\,tg\,x_1 - arc\,tg\,x$. Ako dakle lik $OABC$ razdijelimo ordinatama točaka luka AB u vrlo uske trapeze, pa je prva ordinata $OA = y_0$, a posljednja $BC = y_n$, onda je površina toga lika $P = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) = z_n - z_0$, t. j. $P = arc\,tg\,1 - arc\,tg\,0 = \frac{\pi}{4}$.

Ako $OC = 1$ razdijelimo na 20 jednakih dijelova, izračunamo ordinate, koje pripadaju djelištima, i primijenimo Simpsonovo pravilo, dobivamo prvih 8 decimala broja π; izlazi naime $\pi \approx 3{,}14159265297$.

Primjer 2. Odredimo površinu lika $OABC$ (sl. 34.)! On je omeđen lukom krivulje $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, koji spaja točke $A\,(0,1)$ i $B\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$, ordinata-

ma tih točaka i osju apscisa. Razdijelimo dužinu $OC = \frac{1}{2}$ na n jednakih dijelova pa ordinate, koje pripadaju djelištima, označimo redom sa y_0, y_1, y_2, . . . , y_n, gdje je $y_0 = OA$, $y_n = BC$! Ako je n vrlo veliko, te ordinate dijele lik $OABC$ u n vrlo uskih trapeza. Ako su y i y' (sl. 34.) baze jednog od tih trapeza, njegova je površina

$$p = \frac{y + y'}{2}(x' - x) = y\,(x' - x).$$



Sl. 34.

Uvedemo li novu variablu z na osnovu relacije $z = arc\,sin\,x$, t. j. $x = sin\,z$, onda je $y = \frac{1}{cos\,z}$, pa izlazi

$$p = \frac{1}{cos\,z} \cdot 2\,cos\,\frac{z' + z}{2}\,sin\,\frac{z' - z}{2}.$$

Kako se z' vrlo malo razlikuje od z, možemo pisati $p = z' - z$. Tako nalazimo, da je površina lika $OABC$ $P = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) = z_n - z_0$, t. j. $P = arc\,sin\,\frac{1}{2} - arc\,sin\,0 = \frac{\pi}{6}$.

Približno izračunavanje površine P s primjenom Simpsonova pravila iziskuje u ovom primjeru mnogo više truda nego u primjeru 1. zbog kvadratnih korijena.

4. Redovi za $\sin nx$ i $\cos nx$. S pomoću adicionih teorema mogu se izrazi: $\sin 3x$, $\sin 5x$, $\sin 7x$... prikazati kao funkcije od $\sin x$. Ako je n neparan prirodni broj, onda zaključkom od n na $(n+2)$ nalazimo, da je

$$\sin nx = n\sin x - \frac{n(n^2-1)}{3!}\sin^3 x + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5 x - \ldots \quad 46)$$

Simbol $k!$ (čitaj: k *faktorijela*) znači produkt $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots (k-1)\,k$.

Ako je n paran prirodni broj, onda jednako tako nalazimo, da je

$$\cos nx = 1 - \frac{n^2}{2!}\sin^2 x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4 x - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!} + \ldots \quad 47)$$

Uz uvjet, da je n u 46) neparan, a u 47) paran prirodni broj, redovi na desnoj strani tih jednadžbi imaju konačan broj članova; za svako drugo n, oni su beskonačni, ali konvergentni. Dade se dokazati, da jednadžbe 46) i 47) vrijede za svako realno n, pa ih možemo upotrebiti za izračunavanje broja π, i to bez iracionaliteta, ako uzmemo $x = \frac{\pi}{6}$, jer je onda $\sin x = \frac{1}{2}$. Želimo li izračunati π na

više decimala, valja uzeti n maleno, na pr. $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, pa upotrebiti formule 44) i 45); račun ne zadaje mnogo truda.

5. Redovi za $\sin x$ i $\cos x$. Ako u jednadžbama 46) i 47) mjesto x stavimo $\frac{x}{n}$, gdje je n vrlo velik broj, a x koji god kut, možemo mjesto $\sin\frac{x}{n}$ pisati $\frac{x}{n}$, pa onda te jednadžbe za n beskonačno veliko prelaze u

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad 48)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad 49)$$

Redovi na desnoj strani su beskonačni, ali su konvergentni za svako x.

6. Za Newton-om. *a)* Prema 48) i 49) je $3\sin x - x\cos x = 2x - A^2$, t. j. $\frac{3\sin x}{2+\cos x} < x$, a to je Cusanusova nejednadžba.

b) Ako u 48) zamijenimo x sa $\frac{x}{2}$ pa tako dobivenu jednadžbu pomnožimo sa 8 i od nje odbi-

jemo 48), izlazi $8\sin\frac{x}{2} - \sin x = 2x - B^2$, ili $\frac{1}{3}\left(8\sin\frac{x}{2} - \sin x\right) < x$; to je nejednažba 29).

U nejednadžbama 30), 31) i 32) dolazi funkcija tangens; da ih izvedemo gornjim načinom, odredimo iz 48) i 49) prema formuli $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nekoliko prvih članova reda za $tg\,x$! Nalazimo $tg\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots$. Ako u toj jednadžbi zamijenimo x sa $\frac{x}{2}$, pomnožimo je sa 4 i onda pribrojimo 48), dobivamo $4\,tg\frac{x}{2} + \sin x = 3x + C^2$, t. j. $x < \frac{1}{3}\left(4\,tg\frac{x}{2} + \sin x\right)$, a to je nejednadžba 30). Na sličan se način dobivaju nejednadžbe 31) i 32).

c) Načinom, kojim je Newton izveo svoju formulu[28], izvest ćemo drugu, koja daje znatno bolju donju granicu za kružni luk od njegove, samo nije tako jednostavna.

Napišimo redove za $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x\cos x$ i $\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \cos^2 x$!

[28]) Gl. Bentel, l. c. str. 36.

$$\left.\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\
\cos x &= 1 - \frac{2x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \ldots \\
\sin x\cos x &= x - \frac{4x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} - \frac{64x^7}{7!} + \ldots \\
\cos^2 x &= 1 - \frac{6x^2}{3!} + \frac{40x^4}{5!} - \frac{224x^6}{7!} + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad 50)$$

Ako prvu jednadžbu pomnožimo s 1, drugu sa ax, treću sa b i četvrtu sa cx, dobivamo, da je $\sin x + ax\cos x + b\sin x\cos x + cx\cos^2 x \approx (1 + a + b + c)\,x$, kad se brojevi a, b i c odrede tako, da bude

$$\begin{aligned}
3a + 4b + 6c &= -1 \\
5a + 16b + 40c &= -1 \\
7a + 64b + 224c &= -1
\end{aligned}$$

Kako iz tih jednadžbi izlazi $a = -\frac{3}{5}$, $b = \frac{5}{16}$, $c = -\frac{3}{40}$, to je

$$\frac{5\sin x\,(16 + 5\cos x)}{3\,(17 + 16\cos x + 2\cos^2 x)} < x \qquad 51)$$

Za $x = \frac{\pi}{6}$ ta nam nejednadžba daje prvih 6 decimala broja π, jer izlazi $\pi > 3{,}1415922$.

Huygensovu nejednadžbu 44) dobijemo, ako u nejednadžbama 50) mjesto reda za $\cos^2 x$ upotre-

bimo red za $\frac{1}{4}(\sin 3x + \sin x) = \sin x \cos^2 x$ pa onda prvu jednadžbu pomnožimo sa 10, drugu sa $(-9x)$, treću sa 6, a četvrtu sa (-1) i zbrojimo.

Newtonovu nejednadžbu 45) ćemo dobiti, ako prvu jednadžbu u 50) pomnožimo sa 1, drugu sa $\left(-\frac{3}{7}\right)$, treću sa $\frac{1}{14}$ pa te tri jednadžbe zbrojimo.

Da Newtonovoj donjoj granici u 45) nađemo adekvatnu gornju granicu i po jednostavnosti, pomnožimo red za $\sin x$ sa 1, red za $\cos x$ sa $\left(-\frac{9}{29}x\right)$ a red za $tg\,x$ sa $\frac{1}{29}$ i zbrojimo! Izlazi

$$x < \frac{29 \sin x + tg\,x}{3\,(7 + 3\cos x)} \qquad 52)$$

Za $x = \frac{\pi}{12}$ nalazimo $\pi < 3{,}1415947\ldots$

7. Eulerovim stopama. *a)* Ako su $x_1, x_2, \ldots x_n$ realni brojevi, pa ako faktore na lijevoj strani jednadžbe

$$\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \ldots . \left(1 - \frac{x}{x_n}\right) = 0 \qquad 53)$$

izmnožimo, dobit ćemo ekvivalentnu jednadžbu

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = 0. \quad 54)$$

Brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su korijeni jednadžbe 54).

EULER

Vrijedi i obrat, t. j. ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ korijeni jednadžbe 54), nezina se lije a strana može prikazati u obliku produkta na lijevoj strani jednadžbe 53).

Napišemo li jednadžbu 48) u obliku

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots, \qquad 55)$$

onda vidimo, da se polinom na desnoj strani jednadžbe 55) poništava za $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \ldots$ pa prema predašnjem možemo pisati

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots \qquad 56)$$

Stavimo li u tu jednadžbu $x = \frac{\pi}{2}$, izlazi

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 9}{8\cdot 8}\ldots. \text{ ili}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\ldots},$$

a to je drugi beskonačni produkt u vezi s brojem π; našao ga je *J. Wallis* induktivnim putem baveći se integracijom.[29]

b) Ako su poznati korijeni $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jednadžbe 54), onda su koeficijenti $a_1, a_2, \ldots a_n$ jednoznačno određeni, što se vidi, ako se faktori na lijevoj strani jednadžbe 53) izmnože. Tako nalazimo,

[29]) Tropfke, l. c. str. 223.

da je $a_1 = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)$, $2a_2 = a_1^2 - \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2}\right)$, i t. d.

U polinomu na desnoj strani jednadžbe 55) je $a_1 = -\frac{1}{6}$, $a_2 = \frac{1}{120}, \ldots$, pa prema 56) možemo pisati: $\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \ldots = \frac{1}{6}$;

$$\frac{1}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots\right) = \frac{1}{36} - \frac{1}{60} = \frac{1}{90}, \text{ t. j.}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \qquad 57)$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots \qquad 58)$$

Polinom na desnoj strani jednadžbe 49) poništava se za $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}$, i t. d. pa izlazi

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots \qquad 59)$$

Tu je $a_1 = -\frac{1}{2} = -\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right)$,

$$\frac{16}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}, \text{ t. j.}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots \qquad 60)$$

$$\frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots \quad 61)$$

Kako je $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{8\cdot 6} = \frac{\pi^2}{9}$, a $\frac{\pi^4}{96} - \frac{\pi^4}{81\cdot 96} = \frac{5\pi^4}{486}$, izlazi:

$$\frac{\pi^2}{9} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \ldots \quad 62)$$

$$\frac{5\pi^4}{486} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{11^4} + \frac{1}{13^4} + \frac{1}{17^4} + \ldots \quad 63)$$

U obje posljednje jednadžbe u nazivnicima na desnoj strani su kvadrati i bikvadrati neparnih prirodnih brojeva, izuzevši one, koji su djeljivi s 3.

Upotrebimo li koeficijente a_3, a_4 a_5, . . . , dobit ćemo slične redove s višim potencijama recipročnih vrijednosti prirodnih brojeva [30].

c) Redovi 57) do 63) konvergiraju sporo, pa stoga nijesu prikladni za izračunavanje broja π. Ako s pomoću reda za $\cos x$ odredimo redom izraze za $1 - \cos x$, $(1 - \cos x)^2$, $(1 - \cos x)^3$, i t. d., pa ih pomnožimo brojevima, odabranim tako, da je zbroj koeficijenata svake potencije od x, veće od x^2, jednak nuli, dobivamo induktivnim putem red

$$\frac{x^2}{2} = z + \frac{1}{3}\cdot\frac{z^2}{2} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{z^4}{4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\cdot\frac{z^5}{5} + \ldots,$$

gdje je $z = 1 - \cos x$.

[30] Gl. Euler-Maser, Finleitung in die Analysis des Unenplichen, I. Tei, Berlin, 1885., str. 134.!

Stavimo li $x = \frac{\pi}{2}$, onda je $z = 1$, pa izlazi $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{2}{45} + \frac{1}{70} + \frac{8}{1575} + \frac{4}{2079} + \ldots$; za $x = \frac{\pi}{3}$ je $z = \frac{1}{2}$, pa nalazimo $\frac{\pi^2}{9} = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{90} + \frac{1}{560} + \frac{1}{3150} + \ldots$.

Obadva posljednja reda konvergiraju puno brže od redova 60) i 62), pa ako u posljednjemu zbrojimo prvih devet članova, izlazi $\pi^2 > 9{,}86960308\ldots$, a odatle $\pi > 3{,}1415924\ldots$

8. Red za *arc sin x*. Prema VII. t. 4. možemo pisati

$$\sin\frac{z}{n} = \frac{1}{n}\sin z - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\sin^3 z + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\left(\frac{1}{n^2} - 3^2\right)\sin^5 z - \ldots$$

Ako je n vrlo veliko, možemo mjesto $\sin\frac{z}{n}$ pisati $\frac{z}{n}$, pa ako posljednju jednadžbu pomnožimo sa n, izlazi

$$z = \sin z + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 z}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^5 z}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\sin^7 z}{7} + \ldots$$

Stavimo li $\sin z = x$, onda je $z = arc\sin x$, pa posljednja jednadžba prelazi u

$$arc\sin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots \quad 64)$$

Ako zbrojimo prvih 30 članova toga reda, uzevši $x = \frac{1}{2}$, t. j. $arc\sin x = \frac{\pi}{6}$, možemo izračunati prvih 20 decimala broja π. Red je našao Newton i s pomoću njega odredio π na 14 decimala[31].

9. Red za *arc tg x*. Na osnovu formule $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$ možemo $tg2z$, $tg3z$, $tg4z$, i t. d. izraziti s pomoću $tg z = x$. Zaključkom od n na $(n+1)$ izlazi, da je za svaki prirodni broj n

$$tg\, nz = \left[\binom{n}{1} x - \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{5} x^5 - \ldots\right] : \left[1 - \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{4} x^4 - \ldots\right].$$

Simbol $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)}{k!}$ zove se binomni koeficijent.

Dade se dokazati, da izraz za $tg\, nz$ vrijedi za svako realno n. Ako n nije prirodni broj, redovi u dividendu i divizoru su beskonačni, ali konvergentni za $-1 \leqq x \leqq 1$.

[31]) Bentel, l. c. str. 38.

Stavimo li $n = \frac{1}{m}$, gdje je m vrlo velik broj, onda mjesto $tg\frac{z}{m}$ možemo pisati $\frac{z}{m}$, pa ako jednadžbu za $tg\frac{z}{m}$ pomnožimo sa m, dobivamo

$$z = arc\, tg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad 65)$$

Taj je red konvergentan za $-1 \leqq x \leqq 1$, a našao ga je *J. Gregory* 1671.[32] *Leibniz* je drugim putem našao[33], da je $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, pa se taj red zove *Leibnizov red.* Dobiva se iz 65) za $x = 1$, a konvergira vrlo sporo pa nije prikladan za izračunavanje broja π.

Za $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ iz 65) izlazi

$$\frac{\pi}{6}\sqrt{3} = 1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 7} + \frac{1}{3^4\cdot 9} - \ldots\ldots$$

S pomoću toga reda odredio je *A. Sharp* broj π na 72 decimale[33].

Da se uklonimo iracionalitetima i da dobijemo redove, koji brzo konvergiraju, možemo kao u V. 4. kut $\frac{\pi}{4}$ rastaviti u manje, kojima su tangensi racio-

[32]) Tropfke, l. c str. 224.
[33]) Tropfke, l. c. str. 225.

nalni brojevi. Tako je s pomoću reda za *arc tg* x i formule $\frac{\pi}{4} = 4\,arc\,tg\,\frac{1}{5} - arc\,tg\,\frac{1}{239}$ (*J. Machin* 1706.) odredio broj π na 100 decimala; Vega je 1794. na osnovu formula: $\frac{\pi}{4} = 5\,arc\,tg\,\frac{1}{7} + 2\,arc\,tg\,\frac{3}{79}$ i $\frac{\pi}{4} = 2\,arc\,tg\,\frac{1}{3} + arc\,tg\,\frac{1}{7}$, izračunao π na 140 decimala, Z. Dahse s pomoću formule $\frac{\pi}{4} = arc\,tg\,\frac{1}{2} + arc\,tg\,\frac{1}{5} + arc\,tg\,\frac{1}{8}$ na 200 decimala, i t.d. G. 1874. odredio je *W. Shanks* s pomoću Machin-ove formule π na 707 decimala.[34]

Machin-ova je formula vrlo prikladna za izračunavanje broja π stoga, što su u redu za *arc tg* 0,2 brojnici razlomka neparne potencije od 0,2 a nazivnici maleni brojevi, dok red za $arc\,tg\,\frac{1}{239}$ brzo konvergira. Da dobijemo prvih 14 decimala broja π, dosta nam je izračunati na 16 decimala prvih 11 članova reda za *arc tg* 0,2 i prva 3 člana reda za $arc\,tg\,\frac{1}{239}$. Izađe s pogreškom manjom od $78 : 10^{16}$ broj $\pi \approx 3{,}1415926535897912$.

[34]) gl. Tropfke. l. c. str. 225.—227. i Bentel, l. c. str. 37.—42.!

VIII. Problem je riješen

1. Broj π je iracionalan. Mnogi, koji su se bavili kvadraturom kruga, slutili su da je π iracionalan broj. *De Lagny,* koji je samostalno našao Leibnizov red i odredio π na 127 decimala, izrekao je (1719.) bez dokaza poučak, da je mjerni broj kuta u radijanima iracionalan, ako je tangens toga kuta racionalan broj; [35]) kako je $tg\,\frac{\pi}{4} = 1$, po tome je poučku $\frac{\pi}{4}$, dakle i π iracionalan broj. Dokaz toga poučka dao je prvi *J. H. Lambert*[36]), a za njim *Legendre*[36]). Dokaz je indirektan; ako se pretpostavi, da je mjerni broj kuta u radijanima racionalan, iz svojstva t. zv. verižnih razlomaka izlazi, da mu je tangens iracionalan broj. Legendre je tako dokazao i iracionalitet broja π^2.

Dokazom iracionaliteta broja π problem kvadrature kruga nije riješen, jer se mnoge dužine,

[35]) Tropfke, l. c. str. 224, 226. i 230.

[36]) Rudio l. c. str. 135.—155. i str. 159.—166. Obadva dokaza nijesu bez znatnih prigovora; dokaz, što ga na osnovu Leibnizova reda daje Beutel (l. c. str. 51.), pogrešan je.

kojima su mjerni brojevi iracionalni, na pr. dijagonala kvadrata sa stranicom 1, mogu konstruirati s pomoću ravnala i šestila.

2. Broj π je transcendentan. Zadana je jednadžba oblika

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_n x^n = 0,$$

gdje su koeficijenti $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ cijeli brojevi, a n konačan cio broj. Svaki broj, koji zadovoljava takvu jednadžbu, zove se *algebarski*, dok se brojevi, koji ne mogu biti korijeni takve jednadžbe, zovu *transcendentni*. Kako je svaki racionalni broj ujedno i algebarski, to je svaki transcendentni broj nužno iracionalan. Da ima transcendentnih brojeva, dokazao je prvi *Liouville* (1844)

Godine 1873. dokazao je *Hermite,* da je baza prirodnih logaritama e transcendentan broj. Godine 1882. dokazao je Lindemann, da nemože postojati jednadžba

$$a_0 + a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + a_3 e^{\alpha_3} + \ldots + a_n e^{\alpha_n} = 0,$$

u kojoj su koeficijenti $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ kakvi god algebarski brojevi, a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ među sobom različiti algebarski brojevi. Kako je $1 + e^{\pi} = 0$, gdje je $i = \sqrt{-1}$, izlazi, da $i\pi$ ne može biti algebarski broj, pa prema tome ni sam broj π, t. j. π je transcendentan broj [37])

[37]) Dokaz transcendencije brojeva e i π prema Hilbertu nalazi se u F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus I. Band, Berlin 1924., str. 256.—271.

3. Transcendentnost broja π i problem kvadrature kruga. S pomoću ravnala i šestila, t j. s pomoću pravaca i kružnica mogu se konstruirati korijeni samo algebarskih jednadžbi, i to onih, koje se mogu svesti na jednadžbe 1 ili 2. stepena.

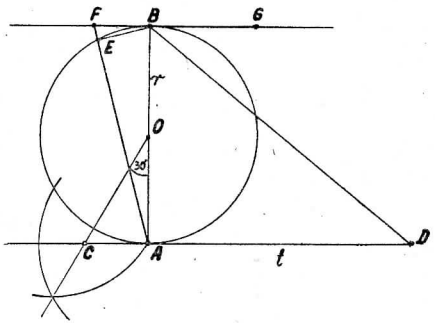
Mjerni broj brida kocke, koja je 2 puta veća od kocke s bridom 1, korijen je jednadžbe $x^3 - 2 = 0$. Kako se ta jednadžba ne da svesti na jednadžbe 1. i 2. stepena, klasični problem podvostručenja kocke ne da se riješiti samo s pomoću ravnala i šestila.

Konstruirati trećinu zadanog kuta α znači konstruirati korijene jednadžbe $4x^3 - 3x - k = 0$, gdje je $k = \cos\alpha$, a $x = \cos\frac{\alpha}{3}$. Ako je na pr. $\alpha = 60^0$, onda je $k = \frac{1}{2}$, pa valja konstruirati korijene jednadžbe $8x^3 - 6x - 1 = 0$; ta se jednadžba ne da reducirati, pa prema tome ima kutova, koji se samo s pomoću ravnala i šestila ne daju razdijeliti na tri jednaka dijela.

Budući da je π transcendentan broj, njegova se konstrukcija ne da svesti na konstrukciju korijena bilo koje algebarske jednadžbe, kojoj je stepen konačan prirodni broj. Problem kvadrature kruga riješen je dakle potpuno, i to negativno, t. j. broj π se ne može konstruirati s pomoću pravaca i kružnica pa čak ni bilo kojih algebarskih krivulja. On

se može konstruirati samo s pomoću nekih transcendentnih krivulja, prozvanih stoga zajedničkim imenom kvadratrikse, na pr. *Hipijine* krivulje, kako je pokazao *Deinostrat*, pa s pomoću Arhimedove spirale, kokleoide i drugih.

4. Približne konstrukcije broja π. *a)* Mnogobrojne su elementarne konstrukcije broja π, ali ni jedna od njih nije prema predašnjemu mogla biti točna nego samo približna. Čim je broj π bio određen na dovoljan broj decimala, lako je bilo ustanoviti ne samo netočnost nego i stupanj točnosti takve konstrukcije; valjalo je samo mjerni broj konstruirane dužine usporediti s brojem π.



Sl. 35.

b) Najpoznatija je jednostavna, a vrlo točna konstrukcija, što ju je dao *A. Kohanski* (1685.). Neka je O središte, a $AB = 2r$ promjer zadane kružnice (sl. 35.)! Na tangenti t kružnice s diralištem u A konstruirali smo točku C tako, da je $\sphericalangle AOC = 30^0$, i odmjerili na njoj dužinu $CD = 3r$; dužina je $DB \approx r\pi$.

Računom:

$$AC = \frac{r\sqrt{3}}{3};\quad \overline{AD}^2 = r^2\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{r^2}{9}\left(84 - 18\sqrt{3}\right);$$

$$\overline{BD}^2 = 4r^2 + \frac{r^2}{9}\left(84 - 18\sqrt{3}\right) = \frac{r^2}{9}\left(120 - 18\sqrt{3}\right);$$

$BD = \frac{r}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}} = r.\,3{,}141533\ldots$ Ako je na pr. polumjer kruga $r = 100\ cm$, pogreška je u opsegu prema konstrukciji manja od $0.012\ cm$.

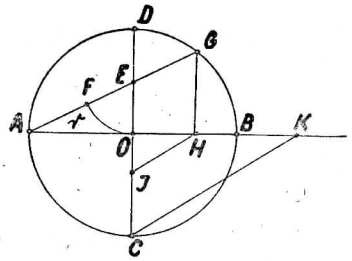
Jednostavna i dosta točna je konstrukcija prema Huygensovoj nejednadžbi 31). Ako je E točka kružnice (sl. 35.), $\sphericalangle BAE = 15^0$, F sjecište pravca AE i tangente kružnice s diralištem u B, a dužina $BG = 2BE$, onda je $2FG \approx r\pi$.

Računom: $BE = s_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; $AE = r\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $EF = \frac{BE^2}{AE} = r\sqrt{(2-\sqrt{3})^3}$; $BF = r\sqrt{BE^2 + EF^2} = 2r(2 - \sqrt{3})$; $2FG = r.\,3{,}14235\ldots$. Ako je $r = 100\ cm$, pogreška je u opsegu manja od $0{,}15\ cm$.

Konstrukcija broja π, što ju je dao Vieta, nešto je točnija od konstrukcije Kohanskoga, samo nije tako jednostavna; osnovana je na razmjeru $\frac{r\pi}{2} : \frac{3r}{5} \approx r : (r - s_{10})$. U slici 36. su AB i CD dva među sobom okomita promjera, $OE = ED = EF = \frac{r}{2}$,

i prema tome $AF = s_{10}$. Ako pravac AE siječe kružnicu u G, pa je $GH \perp AB$, onda iz sličnosti trokuta OEA, AGB i AGH dobivamo razmjere:

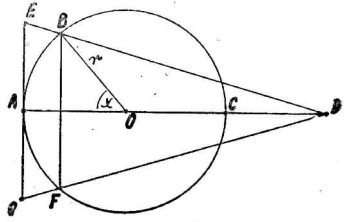
$$2r : AG = AE : r,$$
$$AG : AH = AE : r.$$



Sl. 36.

Množenjem tih razmjera izlazi $AH = \frac{8}{5}r$, t.j. $OH = \frac{3}{5}r$. Načinimo li dakle $CJ = AF = s_{10}$ i $CK \parallel HJ$, onda je $OK \approx \frac{r\pi}{2}$. Prema konstrukciji je $2 \cdot OK = r.3{,}141641\ldots$. Za $r = 100\,cm$ pogreška je u opsegu manja od $0{,}01\,cm$.

c) Za rektifikaciju manjih kružnih lukova mnogo se upotrebljava Huygensova konstrukcija, kojoj je temelj usanusova formula 34). Da rektificiramo kružni luk $AB = x$ (sl. 37.), produljimo promjer $AC = 2r$ preko C za $CD = r$! Ako je točka E sjecište pravca DB i



Sl. 37.

tangente kružnice s diralištem u A, onda je dužina AE to točnije jednaka luku AB, što je luk manji; tako je $EG \approx$ luku BF.

Iz razmjera $AE : r\sin x = 3r : (2r + r\cos x)$ izlazi

$$AE = \frac{3r\sin x}{2 + \cos x} \approx x.$$

DODATAK

Kratka povijest problema kvadrature kruga

(Prema Tropfke-u, Rudiu, Bente-u i dr.)

Najstarije pisano pravilo za kvadraturu kruga nalazi se u staroegipatskoj računici (*Papyrus Rhind* Britanskog muzeja), koju je napisao kraljev pisar *Ahmes* oko 1700 god. pr. n. e. Tamo se kaže, da je krug jednak kvadratu, komu je stranica $\frac{8}{9}$ promjera kruga, t. j. valja uzeti $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16049$ .... Ta za ono doba vrlo točna vrijednost nije prešla granica Egipta, jer se još mnogo kasnije u Babiloniji i Kini za omjer između opsega i promjera kruga uzima broj 3, a u Indiji brojevi 3,0625, 3,0883, 3,044.

Među prvim Grcima, koji su se bavili problemom kvadrature kruga, bio je učitelj Periklov *Anaksagora* (500.—428. god. pr. n. e.). Prema Plutarhu on je nacrtao kvadrat jednak krugu; kako, to ne znamo

Da ima likova, omeđenih kružnim lukovima, koji se mogu pretvoriti u kvadrat samo s pomoću ravnala i šestila, pokazao je *Hipokrat* (oko 440. pr. n. e.).

Rješavajući problem trisekcije kuta našao je oko god. 420. pr. n. e. *Hipija* krivulju, s pomoću koje je *Deinostrat* (350.—300 god. pr. n. e.) mogao konstruirati kvadrat jednak zadanome krugu; stoga je ta krivulja prozvana τετραγωνίζουσα.

Antifon (ako 430. pr. n. e.) došao je na misao, da se krugu upišu pravilni mnogokuti sa 4, 8, 16, ... stranica; kako se svaki mnogokut može s pomoću ravnala i šestila pretvoriti u kvadrat, zaključio je, da se i krug može tako pretvoriti u kvadrat, jer da je istovetan s pravilnim mnogokutom, koji ima vrlo mnogo stranica. Kad je Antifonov suvremenik *Brison* upisanim dodao i krugu opisane pravilne mnogokute, postalo je očito, da je površina svakog pravilnog mnogokuta, koji je upisan krugu, samo donja, a površina opisanog samo gornja granica za površinu kruga.

Arhimed (287.—212) u svom znamenitom dielu „Κύκλου μέτρησις" izračunava redom opsege krugu upisanih i opisanih pravilnih mnogokuta sa 6, 12, 24, 48 i 96 stranica pa nalazi $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Arhimedov broj $3\frac{1}{7}$ brzo prelazi u druge kulturne zemlje (Indiju, Kinu, Japan) pa je od nekih neupućenih još u srednjem vijeku smatran točnom vrijednosti broja π. *Apolonije* (200. god. pr. n. e.) našao je za π pri-

bližnu vrijednost $3\frac{177}{1250}$, a *Ptolemej* (87.—165. g.) vrijednost $3\frac{17}{120}$.

Ti su brojevi našli put u Indiju, gdje *Aryabhatta* (rođ. 476. god.) izvodi formulu $s_n = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ pa s pomoću nje izračunava opseg pravilnog 384-erokuta i nalazi za π broj jednak Apolonijevu. *Brahmagupta* (rođ.. 598.) uzima za π nètočniju vrijednost $\sqrt{10}$.

Slijedeći Arhimeda *Vieta* (1540.—1603) izračunava π na 9 decimala, *A. van Roomen* (1561.—1615) na 15 decimala, a *Ludolf van Ceulen* (1539.—1610) odredio je π najprije na 20 decimala, zatim na 32 i napokon na 35 decimala, pa se π još i danas zove Ludolfovim brojem. Metius (1527.—1607.) nalazi za π približnu vrijednost $\frac{355}{113}$, koja se s π podudara u prvih 6 decimala.

Valja istaći, da je *N. Cusanus* (1401.—1461.) prvi pokušao odrediti π izoperimetrijskom metodom i da je našao prvu formulu za približnu rektifikaciju luka. Prvi beskonačni produkt za π postavio je Vieta, a drugi *J. Wallis* (1616.—1703.)

S pomoću Cusanusove formule kao donje i jedne svoje kao gornje granice kružnog luka izračunao je *Snellius* (1580.—1626.) π na 34 decimale sa znatno manjim trudom nego Ludolf. Nastavljajući

Snellius-ov rad *Huygens* (1629.—1625) piše kao 25-godišnji mladić svoje klasično djelo „*De circuli magnitudine inventa.*“ Štampano je prvi put 1654. i smatra se zadnjom riječi u određivanju broja π elementarno geometrijskim putem. Vrlo se teško čita, jer je pisano bez ikakve simbolike, a brzo je palo u zaborav zbog toga, što su se matematičari svim žarom priklonili višoj analizi, koja se još za života Huygensova počela snažno razvijati.

J. Gregoru (1638.-1675.) nalazi red za *arctg* x; *Newton* (1643.—1727.) postavlja redove za *sin* x, *cos* x, *arc sin* x i *arctg* x pa s pomoću reda za *arc sin* x izračunava brzo i lako π na 14 decimala. S pomoću reda za *arctg* x izračunao je 1700 god. *A. Sharp* π na 72 decimale, a 1706. *Machin* na 100 decimala.

L. Euler (1707.—1783.) upotrebljava od 1737. oznaku π za omjer opsega kruga prema promjeru, uvodi oznaku *e* za bazu prirodnih logaritama i pronalazi znamenitu relaciju $e^{i\pi} = -1$, s pomoću koje je uprav 100 godina poslije njegove smrti u potpunosti riješen problem kvadrature kruga. U svojim radovima, a osobito u djelu „*Introductio in analysin infinitorum*“ (izišlo prvi put u Lozani 1784.) izvodi mnogobrojne bezkonačne redove za broj π i njegove potencije, ali problem kvadrature kruga nije riješio.

Kada su *Lambert* (1728.—1777.), *Legendre* (1757.—1833.) i *Gauss* (1777.—1855.) dokazali, da je broj

π iracionalan broj, time nije bilo dokazano, da se problem kvadrature kruga ne da riješiti, pa su stručnjaci i nestručnjaci mogli u miru nastaviti svoje mnogobrojne pokušaje, da ga riješe.

Budući da su se neki stručnjaci nadali, da će u redoslijedu decimala broja π otkriti kakav zakon i tako utvrditi njegovu narav, nastavljeno je izračunavanje broja π na sve više i više decimala. Spomenut ćemo samo neke rezultate: Slovenac *Vega* izračunao je 1794. broj π na 140 decimala, *Z. Dahse* 1844. na 200 decimala, *Richter* 1855. na 500 decimala pa *W. Shanks* 1873. do 1874. na 707 decimala. Traženi zakon nije nađen do danas, iako su poznate 2000 prvih decimala broja π.

God. 1873. dokazao je *Hermite,* da je broj *e* transcendentan broj Nastavljajući njegovim putem dokazao je 1882 *F. Lindemann,* da je broj π transcendentan. Time je tisućljetni problem kvadrature kruga bio u potpunosti riješen. Ne samo s pomoću pravaca i kružnica nego ni s pomoću bilo kakvih algebarskih krivulja krug se ne može pretvoriti u kvadrat.

Sadržaj:

Strana

I. Kvadratura kruga i rektifikacija kružnice

1. Problem kvadratu e kruga 5
2. Krug i kružnica 6
3. Rektifikacija kružnice 15
4. Broj π 22
5. Kvadratura kruga 23

II. Arhimed i njegovi epigoni

1. Arhimedov broj 24
2. Relacije izmedu s_n, S_n i s_{2n} 28
3. Relacije izmedu o_n, O_n, o_{2n} i O_{2n} 32
4. Pravilni mnogokuti sa $15 \cdot 2^n$ stranica 33

III. Četiri elementarne metode za izračunavanje broja π

1. Metoda opsega 36
2. Metoda površina 36
3. Izoperimetrijska metoda ili metoda jednakih opsega 37
4. Metoda jednakih površina 39

IV. Huygens

1. De circuli magnitudine inventa 41
2. Malo o paraboli 41
3. Kvadratura paraboličnog odsječka 46
4. Geometrijski izvod Huygensovih nejednadžbi V. do IX. 48
5. Izvod Huygensovih nejednadžbi VII. do XI. računom 53
6. Nejednadžbe za $\frac{1}{\pi}$ analogne Huygensovim . . . 56

V. Rektifikacija kružnog luka

1. Prve granice kružnoga luka 57
2. Nejednadžbe za kružni luk analogne onim za opseg kruga 58

Strana

3. Fukcija tg x 63
4. Odredivanje broja π s pomoću Heronovih trokuta 65

VI. Geometrija je dio mehanike (Newton)

1. Prvi beskonačni produkt 68
2. Težište kružnog luka i kružnoga isječka 69
3. Težište kružnog odsječka 71
4. Izvod jedne Huygensove, jedne nove i Cusanusove nejednadžbe 72
5. Težište paraboličnog odsječka 73
6. Izvod Huygensova XVI. stavka i Newtonove nejednadžbe 75

VII. Na pragu više matematike

1. Izračunavanje površine kruga s pomoću trapeza . 79
2. Simpsonovo pravilo 80
3. Izračunavanje broja π s pomoću drugih krivulja . 83
4. Redovi za sin nx i cos nx 86
5. Redovi za sin x i cos x 87
6. Za Newtonom 87
7. Eulerovim stopama 90
8. Red za arc sin x 95
9. Red za arc tg x 96

VIII. Problem je riješen

1. Broj π je iracionalan 99
2. Broj π je transcendentan 100
3. Transcendentnost broja π i problem kvadrature kruga 100
4. Približne konstrukcije broja π 102

Dodatak

Kratka povijest problema kvadrature kruga 106

Uređuje odbor

Glavni urednik prof. Gustav Šindler
Naklada „Školska knjiga"
Tisak „Grafički zavod Hrvatske"
3 000 komada

Obr. br. 32 334